

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 10

รหัสวิชา 3000-1406

วิชา แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 5 ชั่วโมงที่ 28-30

ชื่อหน่วย การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

แนวคิด

การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชันเป็นการนำความรู้เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เรียนมาใช้อย่างมีประสิทธิภาพ เช่น นำมาใช้ในการเขียน กราฟของฟังก์ชัน ความชันของเส้นโค้ง การหาค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์ ของฟังก์ชัน โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่หนึ่ง และอนุพันธ์อันดับที่สอง การนำความรู้เรื่องค่าสูงสุดและต่ำสุดไปใช้ประโยชน์ ในทางช่างและชีวิตประจำวัน การหาความเร็วของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรง การหาค่าอัตราสัมพัทธ์ เป็นการหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของสองสิ่งเปรียบเทียบกับ การหาค่าประมาณโดยใช้ผลต่างอนุพันธ์ (ค่าเชิงอนุพันธ์)

สาระการเรียนรู้

- ความชันของเส้นโค้ง
- การหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันจากนิยาม

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

- เขียนกราฟของเส้นโค้งของฟังก์ชันและหาความชันของเส้นโค้งได้
- หาค่าและคำนวณค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของฟังก์ชันได้
- มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญู กตเวทิตะ

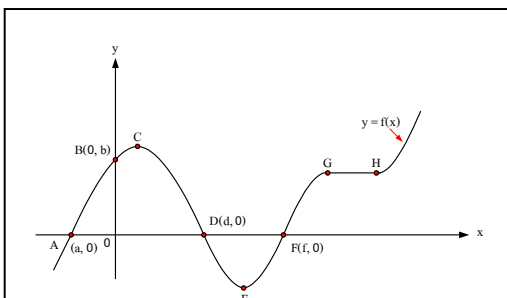
กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

- อาจารย์ทบทวนในเรื่องการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ขั้นสอน

- อาจารย์อธิบายความหมายของความชันของเส้นโค้งให้นักศึกษาเข้าใจเพื่อเป็นพื้นฐานของค่าต่างๆ โดยใช้รูปประกอบ



จุดตัดแกน x และจุดตัดแกน y เราจะพบว่า จุดตัดแกน x มี 3 จุดคือ $A(a, 0)$, $D(d, 0)$ และ $F(f, 0)$ จุดตัดแกน y มีจุดเดียว คือ $B(0, b)$ เนื่องจากกราฟเป็นเส้นโค้ง ดังนั้นจึงมีทั้งโค้งคว่ำ และโค้งหงาย ช่วงใดที่เป็นโค้งคว่ำก็จะทำให้เกิดจุดสูงสุดของ

ฟังก์ชันในช่วงนั้น เราเรียก **จุดสูงสุดสัมพัทธ์** (Relative Maximum Point) ในรูป คือ จุด C ช่วงจาก A ถึง D เรียกว่า **ช่วงโค้งคว่ำ** ช่วงใดที่เป็นโค้งหงาย ก็จะทำให้เกิดจุดต่ำสุดของฟังก์ชันในช่วงนั้นๆ เราเรียกว่า **จุดต่ำสุดสัมพัทธ์** (Relative Minimum Point) ในรูป คือ จุด E ช่วงจาก D ถึง F เรียกว่า **ช่วงโค้งหงาย** นอกจากนี้ถ้าช่วงใดค่าของฟังก์ชันมีค่าเท่ากันทุกค่าตลอดในช่วงนั้น เราจะเรียกว่า **เป็นช่วงคงที่ของฟังก์ชัน** (Constant Interval) เช่นในช่วง G ถึง H

3. ให้นักศึกษาศึกษาการหาค่าอนุพันธ์ฟังก์ชันจากนิยามจากหนังสือเรียน สรุปลงในสมุด
4. อาจารย์นำตัวอย่างจากหนังสือมาอธิบายบนกระดานให้นักศึกษาทำความเข้าใจ โดยการถาม – ตอบ และช่วยกันสรุปวิธีที่ง่ายที่สุดในการหาค่าอนุพันธ์ฟังก์ชัน ในหัวข้อต่อไปนี้
 - ความหมายของอนุพันธ์เรขาคณิต

ตัวอย่าง จงหาความชันของเส้นโค้ง $y = x^2 - 2x + 5$ ที่จุด (2, 5)

∴ ความชันของเส้นโค้งที่จุดใดๆ คือ อนุพันธ์ของเส้นโค้งที่จุดนั้น

∴ จาก $y = x^2 - 2x + 5$

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (x^2 - 2x + 5) \\ &= \frac{dx^2}{dx} - \frac{d2x}{dx} + \frac{d5}{dx}\end{aligned}$$

∴ $\frac{dy}{dx} = 2x - 2$

ดังนั้น ความชันของเส้นโค้งที่จุด (2, 5) คือ $2(2) - 2 = 2$

สรุป การหาความชันของเส้นโค้งหรือเส้นสัมผัสโค้ง มีหลักดังนี้

1. หาค่าอนุพันธ์ของเส้นโค้งที่กำหนดให้ ซึ่งจะเท่ากับความชันของเส้นโค้งนั้นที่จุดใดๆ
2. ให้ (x_1, y_1) เป็นพิกัดของจุดที่ต้องการ (จุดสัมผัส)
3. แทนค่า (x_1, y_1) ลงในอนุพันธ์ตามข้อ 1 ก็จะเป็นความชันของเส้นโค้ง หรือความชันของเส้นสัมผัสโค้งตรงจุดสัมผัสที่ต้องการ
 - สมการของเส้นสัมผัสและเส้นแนวฉากของเส้นโค้ง มี
 - เส้นสัมผัสโค้ง
 - เส้นแนวตั้งฉาก

ตัวอย่าง จงหาสมการของเส้นสัมผัส และเส้นตั้งฉากกับพาราโบลา $y^2 = 4x$ ที่จุด (1, 2)

จากสมการเส้นสัมผัสโค้ง $y - y_1 = m(x - x_1)$

∴ $m = \frac{dy}{dx}$ ∴ จากสมการ $y^2 = 4x$

∴ $\frac{dy^2}{dx} = \frac{d}{dx} 4x$

$$2y \frac{dy}{dx} = 4 \frac{dx}{dx}$$

∴ $\frac{dy}{dx} = \frac{4}{2y} = \frac{2}{y}$

$$\because (x_1, y_1) \text{ คือ } (1, 2) \therefore m = \frac{2}{(2)} = 1$$

$$\text{เส้นสัมผัสคือ } y - 2 = 1(x-1)$$

$$\therefore \text{ สมการเส้นสัมผัสคือ } y = x + 1$$

$$\text{ความชันของเส้นตั้งฉาก} = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$\text{สมการของเส้นตั้งฉาก คือ } y - 2 = -1(x-1) = -x + 1$$

$$\therefore \text{ สมการเส้นตั้งฉาก คือ } y = -x + 3$$

- มุมที่เส้นโค้งสองเส้นตัดกัน
- จุดสูงสุด จุดต่ำสุด และจุดเปลี่ยนเว้า

5. ทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.1

ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. นักศึกษาร่วมกันสรุปการประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ทั้งหมดลงในสมุด
7. อาจารย์ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.1 และชี้แจงสิ่งที่บกพร่องหรือผิดพลาดให้นักศึกษาทราบ

สื่อการเรียนการสอน

1. หนังสือเรียนวิชา แคลคูลัสพื้นฐาน (3000-1406)
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.1

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.1
3. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.1
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.1 ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับประเมินตามสภาพจริง

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 11

รหัสวิชา 3000-1406

วิชา แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 5

ชั่วโมงที่ 31-33

ชื่อหน่วย การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (ต่อ)

แนวคิด

สรุป วิธีหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง

1. จาก $y = f(x)$ หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งก่อน คือ หา $\frac{dy}{dx}$ แล้วให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แก้สมการหาค่าของ x สมมติว่า ได้ $x = a$

2. จาก $\frac{dy}{dx}$ ในข้อ 1 หาอนุพันธ์อันดับที่สอง คือ หา $\frac{d^2y}{dx^2}$

3. นำค่า $x = a$ จากข้อ 1 แทนลงใน $\frac{d^2y}{dx^2}$ ในข้อ 2 แล้วพิจารณาค่าของ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ถ้ามีค่าเป็นบวก

แสดงว่า $x = a$ เป็นค่าที่จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้ามีค่าเป็นลบ แสดงว่า $x = a$ เป็นค่าที่จุดสูงสุดสัมพัทธ์ แต่ถ้า $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ จะ

ทดสอบไม่ได้ว่า เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ต้องกลับไปใช้วิธีการในตอนแรก คือ ใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1

สาระการเรียนรู้

- อัตราสัมพัทธ์
- การหาค่าเชิงอนุพันธ์ (ผลต่างอนุพันธ์)

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

- แก้ปัญหาโจทย์เกี่ยวกับค่าสูงสุดและค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้
- แก้ปัญหาโจทย์ ความเร็วและความเร่งของวัตถุที่เคลื่อนที่ในแนวเส้นตรงได้
- มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูต่อเวที

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

- อาจารย์ทบทวนการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันจากนิยาม โดยการถาม – ตอบ

ขั้นสอน

- นักศึกษาศึกษาใบความรู้ เรื่อง การหาค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดเปลี่ยนเว้ามีขั้นตอนในการดำเนินการอย่างไร
- นักศึกษาทำใบกิจกรรม เพื่อฝึกความชำนาญและทดสอบความรู้
- สื่อนักศึกษาออกมาแสดงวิธีหาคำตอบโดยเพื่อนในห้องเป็นผู้ช่วยเหลือ
- อาจารย์อธิบายและสรุปเพิ่มเติมให้นักศึกษาเข้าใจมากขึ้น
- นักศึกษาทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.2

ขั้นสรุปและการประยุกต์

7. นักศึกษาร่วมกันสรุปการประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ทั้งหมดลงในสมุด
8. อาจารย์ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.2

สื่อการเรียนการสอน

1. หนังสือเรียนวิชา แคลคูลัสพื้นฐาน (3000-1406)
2. ใบความรู้
3. ใบกิจกรรม
4. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.2

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจใบกิจกรรมและแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.2
3. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ใบกิจกรรมและแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.2
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. ใบกิจกรรมและแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.2 ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

ใบความรู้

การทดสอบค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดเปลี่ยนเว้ามีขั้นตอนในการดำเนินการ ดังนี้

ถ้า $y = f(x)$ เป็นฟังก์ชันที่ต่อเนื่องบนช่วงปิด $[a, b]$ โดยมี c เป็นจุดหนึ่งในช่วงเปิด (a, b) ซึ่ง $f(c) = 0$ และสมมติว่า เราสามารถหาอนุพันธ์ของ $f(x)$ ได้ ทุกค่าของ x ในช่วงเปิด (a, b) เว้นแต่จะหาไม่ได้ที่ $x = c$ นั่นคือ ถ้า $f(x)$ เป็นฟังก์ชันของ x และ $x = c$ เป็นจุดวิกฤต (critical point) ของ $f(x)$ ซึ่ง $f'(c) = 0$ หรือ $f'(c)$ หาค่าไม่ได้

ถ้า a และ b เป็นจำนวนจริงซึ่ง $a < c < b$ โดยที่ f ต่อเนื่องตลอดช่วงปิด $[a, b]$, $f'(a)$ และ $f'(b)$ หาค่าได้ และ c เป็นจุดวิกฤตเพียงจุดเดียวในช่วงปิด $[a, b]$ แล้ว จะได้ว่า

1. $f(c)$ จะเป็นสูงสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$ ถ้า $f'(a) > 0$ และ $f'(b) < 0$
2. $f(c)$ จะเป็นต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x)$ ถ้า $f'(a) < 0$ และ $f'(b) > 0$
3. จุด $(c, f(c))$ จะเป็นจุดเปลี่ยนเว้าของ $f(x)$ ถ้า $f'(a) > 0$ และ $f'(b) > 0$ หรือ $f'(a) < 0$ และ $f'(b) < 0$

วิธีการหาค่าสูงสุด, ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ หรือจุดเปลี่ยนเว้าที่กล่าวมา เราเรียกว่า “การหาค่าสูงสุดโดยใช้อนุพันธ์อันดับหนึ่ง” สามารถใช้อนุพันธ์อันดับสองในการหาค่าสูงสุด หรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ได้ด้วย
สรุป วิธีหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ โดยใช้อนุพันธ์อันดับที่สอง

1. จาก $y = f(x)$ หาอนุพันธ์อันดับที่หนึ่งก่อน คือ หา $\frac{dy}{dx}$ แล้วให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แก้สมการหาค่าของ x สมมติว่า ได้ $x = a$
 2. จาก $\frac{dy}{dx}$ ในข้อ 1 หาอนุพันธ์อันดับที่สอง คือ หา $\frac{d^2y}{dx^2}$
 3. นำค่า $x = a$ จากข้อ 1 แทนลงใน $\frac{d^2y}{dx^2}$ ในข้อ 2 แล้วพิจารณาค่าของ $\frac{d^2y}{dx^2}$ ถ้ามีค่าเป็นบวก แสดงว่า $x = a$ เป็นค่าที่จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ ถ้ามีค่าเป็นลบ แสดงว่า $x = a$ เป็นค่าที่จุดสูงสุดสัมพัทธ์
- แต่ถ้า $\frac{d^2y}{dx^2} = 0$ จะทดสอบไม่ได้ว่า เป็นค่าสูงสุดสัมพัทธ์หรือต่ำสุดสัมพัทธ์ ต้องกลับไปใช้วิธีการในตอนแรก คือ ใช้อนุพันธ์อันดับที่ 1

การประยุกต์ค่าสูงสุดและต่ำสุดสัมพัทธ์

ขอสรุปวิธีการแก้ปัญหาเกี่ยวกับการใช้ค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุด เป็นขั้นตอนไว้ 5 ขั้นตอน ดังนี้

ขั้นที่ 1 เขียนรูปประกอบเกี่ยวกับปริมาณต่างๆ ที่เกี่ยวข้องกับปัญหาทั้งหมดให้ได้ รายละเอียดให้มากที่สุด

ขั้นที่ 2 สร้างสมการจากโจทย์ที่กำหนดให้ที่มีค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ในรูปของตัวแปร

ขั้นที่ 3 ถ้าสมการที่สร้างขึ้นมีตัวแปรมากกว่า 2 ตัวแปร ต้องพยายามหาทางกำจัดตัวแปรออกไปให้เหลือเพียงฟังก์ชันตัวแปรเดียว

ขั้นที่ 4 หาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ ตามวิธีการที่เรียนมาแล้ว

ขั้นที่ 5 ใช้เทคนิคที่เรียนมาเกี่ยวกับการทดสอบค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ นำมาประยุกต์ใช้กับปัญหาแต่ละตอน

อัตราสัมพันธ์ (Related Rate) คือ การเปรียบเทียบอัตราการเปลี่ยนแปลงของสิ่งต่างๆ เทียบกับสิ่งเดียวกัน

ความเร็ว (Velocity) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของระยะทางกับเวลาที่เปลี่ยนไป กำหนดให้ระยะทาง คือ การเปลี่ยนแปลงของตำแหน่งวัตถุเมื่อเวลาเปลี่ยนไป ดังนั้น เราจึงเขียนระยะทางได้เป็น $s = f(t)$ นั่นคือ ระยะทาง s จะเปลี่ยนแปลงไปตามเวลาที่เปลี่ยนไป

$$\therefore s = f(t) \quad \dots\dots\dots (1)$$

เมื่อเวลาผ่านไป Δt ระยะทางก็จะเปลี่ยนไป Δs

เมื่อเวลา $t + \Delta t$ วัตถุจะเคลื่อนที่ไปได้ระยะทาง $s + \Delta s$

$$\therefore s + \Delta s = f(t + \Delta t) \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$(2) - (1); \quad \Delta s = f(t + \Delta t) - f(t)$$

$\therefore$ เมื่อเวลาเปลี่ยนไป Δt จะเทียบกับระยะทางได้เป็น $\frac{\Delta s}{\Delta t}$

$$\therefore \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

เราเรียก $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ ว่า ความเร็วเฉลี่ย เมื่อ $\Delta t \rightarrow 0$ ความเร็วเฉลี่ยนี้จะกลายเป็นความเร็วชั่วขณะของเวลา t ใดๆ นั่นคือ

$$\text{ความเร็วชั่วขณะเวลา } t \text{ ใดๆ} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt}$$

$$\text{เขียนแทน } \frac{ds}{dt} \text{ ด้วย } v \text{ นั่นคือ } v(t) = \frac{ds}{dt} \text{ นั่นเอง}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $v > 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $v < 0$ วัตถุจะเคลื่อนที่ในทิศทางที่ได้ระยะทางลดลง
3. ถ้า $v = 0$ แสดงว่าวัตถุจะหยุดนิ่งชั่วขณะ

ความเร่ง (acceleration) คือ อัตราการเปลี่ยนแปลงของความเร็วเทียบกับเวลาที่เปลี่ยนแปลงไปกำหนดให้

$$v(t) = \frac{ds}{dt} \text{ เมื่อเวลาเปลี่ยนไปจาก } t \text{ เป็น } t + \Delta t \text{ ความเร็วจะเปลี่ยนไปเป็น } v + \Delta v$$

$$\text{ดังนั้น} \quad \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{v(t + \Delta t) - v(t)}{\Delta t}$$

$$\therefore \frac{dv}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

เราเรียก $\frac{dv}{dt}$ ว่า อัตราเร่งชั่วขณะของการเคลื่อนที่ของวัตถุ เขียนแทนด้วย a

$$\therefore a = \frac{dv}{dt} \quad \text{แต่} \quad v = \frac{ds}{dt}$$

$$\therefore a = \frac{d}{dt} \left(\frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

ข้อสังเกต

1. ถ้า $a > 0$ ความเร็วเพิ่มขึ้น
2. ถ้า $a < 0$ ความเร็วลดลง
3. ถ้า v และ a มีเครื่องหมายเหมือนกัน อัตราเร็วของวัตถุจะเพิ่มขึ้น แต่
ถ้า v และ a มีเครื่องหมายต่างกัน อัตราเร็วของวัตถุจะลดลง

www.pattaya.ac.th

ใบกิจกรรม

จงเติมส่วนที่หายไปให้สมบูรณ์และถูกต้อง

1. จงหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^4 - 2x^2$

จากโจทย์ $f(x) = y = x^4 - 2x^2$ (1)

จาก (1) หาอนุพันธ์อันดับที่ 1

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2)$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \dots\dots\dots (2)$$

จาก (2) ให้ $\frac{dy}{dx} = 0$ แล้วแก้สมการหาค่าของ x

$$\therefore 4x^3 - 4x = 0$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

$$\dots\dots\dots = 0$$

$$\therefore x = \dots\dots\dots, \dots\dots\dots, \dots\dots\dots$$

ค่า x ที่เป็นค่าวิกฤต คือ ค่า x ที่เท่ากับ $-1, 0, 1$

จาก (2) หา $\frac{d^2y}{dx^2}$ จะได้ว่า

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}(4x^3 - 4x)$$

$$= \dots\dots\dots$$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \dots\dots\dots (3)$$

พิจารณาค่า $x = -1, 0, 1$ ซึ่งเป็นค่า x ที่จุดวิกฤต

นั่นคือ แทนค่า $x = -1$ ใน $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{ที่ } x = -1 \text{ จะให้} \dots\dots\dots \therefore y = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ } f(x) = x^4 - 2x^4 \text{ คือ } (-1, -1)$$

แทนค่า $x = 0$ ใน $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ที่ } x = 0 \text{ จะให้ } \dots\dots\dots \therefore f(0) \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ } f(x) = x^4 - 2x^4 \text{ คือ } (0, 0)$$

แทนค่า $x = 1$ ใน $\frac{d^2y}{dx^2}$

$$\therefore \frac{d^2y}{dx^2} = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\text{ที่ } x = 1 \dots\dots\dots \therefore f(1) = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$$

$$\therefore \text{จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ } f(x) = x^4 - 2x^4 \text{ คือ } (1, -1)$$

เฉลยใบกิจกรรม

1. จงหาค่าสูงสุดหรือค่าต่ำสุดสัมพัทธ์ของ $f(x) = x^4 - 2x^2$

จากโจทย์ $f(x) = x^4 - 2x^2$ (1)

จาก (1) หาอนุพันธ์อันดับที่ 1

$$\therefore f'(x) = \frac{d}{dx}(x^4 - 2x^2)$$

$$\therefore f'(x) = 4x^3 - 4x \quad \text{..... (2)}$$

จาก (2) ให้ $f'(x) = 0$ แล้วแก้สมการหาค่าของ x

$$\therefore 4x^3 - 4x = 0$$

$$4x(x^2 - 1) = 0$$

$$4x(x + 1)(x - 1) = 0$$

$$\therefore x = 0, 1, -1$$

ค่า x ที่เป็นค่าวิกฤต คือ ค่า x ที่เท่ากับ $-1, 0, 1$

จาก (2) หา $f''(x)$ จะได้ว่า

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(4x^3 - 4x)$$

$$= \frac{d}{dx}4x^3 - \frac{d}{dx}4x$$

$$\therefore f''(x) = 12x^2 - 4 \quad \text{..... (3)}$$

พิจารณา ค่า $x = -1, 0, 1$ ซึ่งเป็นค่า x ที่จุดวิกฤต

นั่นคือ แทนค่า $x = -1$ ใน (3)

$$\therefore f'(-1) = 12(-1)^2 - 4 = 8 > 0$$

$$\therefore \text{ที่ } x = -1 \text{ จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์}$$

$$\therefore f(-1) = (-1)^4 - 2(-1)^4 = -1$$

$$\therefore \text{จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ } f(x) = x^4 - 2x^2 \text{ คือ } (-1, -1)$$

ตอบ

แทนค่า $x = 0$ ใน (3)

$$\therefore f'(0) = 12(0)^2 - 4 = -4 < 0$$

$$\text{ที่ } x = 0 \text{ จะให้ค่าสูงสุดสัมพัทธ์} \therefore f(0) = (0)^4 - 2(0)^4 = 0$$

$$\therefore \text{จุดสูงสุดสัมพัทธ์ของ } f(x) = x^4 - 2x^2 \text{ คือ } (0, 0)$$

ตอบ

แทนค่า $x = 1$ ใน (3)

$$\therefore f'(1) = 12(1)^2 - 4 = 8 > 0$$

$$\text{ที่ } x = 1 \text{ จะให้ค่าต่ำสุดสัมพัทธ์} \therefore f(1) = (1)^4 - 2(1)^4 = -1$$

$$\therefore \text{จุดต่ำสุดสัมพัทธ์ของ } f(x) = x^4 - 2x^2 \text{ คือ } (1, -1)$$

ตอบ

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 12

รหัสวิชา 3000-1406

วิชา แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 5 ชั่วโมงที่ 34-36

ชื่อหน่วย การประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน (ต่อ)

แนวคิด

ในการหาค่าอัตราสัมพันธ์ หรือ ทำโจทย์ปัญหาเกี่ยวกับอัตราสัมพันธ์ (Related Rate) คือ

1. ไม่ควรรีบร้อนแทนค่าของตัวแปรหรือตัวไม่ทราบค่าก่อนการหาอนุพันธ์ เพราะจะทำให้การหาค่าอนุพันธ์ได้ศูนย์ทั้งหมด
2. การแทนค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา ควรต้องมีการกำหนดเครื่องหมายของอัตราการเปลี่ยนแปลงด้วย คือ
 - 2.1 ถ้าตัวแปรเพิ่มขึ้น เมื่อเวลาเพิ่มขึ้น ให้อัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา มีค่าเป็น บวก
 - 2.2 ถ้าตัวแปรลดลง เมื่อเวลาลดลง ให้อัตราการเปลี่ยนแปลงเทียบกับเวลา มีค่าเป็น ลบ

สาระการเรียนรู้

5. การหาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ค่าเชิงอนุพันธ์

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

5. แก้ปัญหาโจทย์ที่เกี่ยวกับอัตราสัมพันธ์ได้
6. หาค่าโดยประมาณของฟังก์ชันโดยใช้ผลต่างอนุพันธ์ได้
7. มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูกตเวที

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

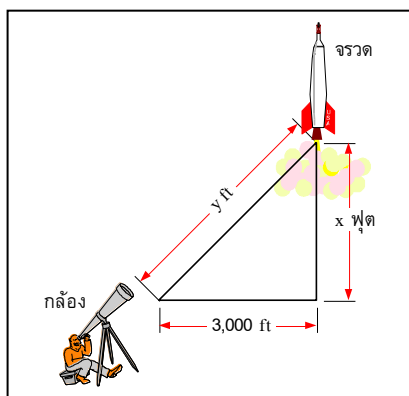
ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. อาจารย์ทบทวน อัตราสัมพันธ์ โดยการสนทนา ถาม - ตอบ

ขั้นสอน

2. อาจารย์ยกตัวอย่าง อัตราสัมพันธ์ พร้อมทั้งอธิบายและซักถาม

ตัวอย่าง 1 ถ้าจรวดลำหนึ่ง ตามรูปที่ 5.11 กำลังถูกยิงขึ้นในแนวตั้งด้วยความเร็ว 880 ฟุต/วินาที ในขณะนั้นจรวดอยู่ห่างจากฐานยิง 4,000 ฟุต กล้องสังเกตการณ์อยู่ห่างจากฐานยิงจรวด 3,000 ฟุต จงหาความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง ที่จรวดกำลังเคลื่อนที่ห่างออกจากกล้องสังเกตการณ์อันนี้



กำหนดให้

- t = เวลาที่จรวดใช้ในการเดินทาง (วินาที)
- y = ระยะทางจากกล้องถึงจรวดหลังจากยิงจรวดไปแล้ว t วินาที (ฟุต)
- x = ความสูงของจรวดที่ห่างจากฐานยิงหลังจากเวลาผ่านไป t วินาที (ฟุต)

$\frac{dy}{dt}$ = ความเร็วขณะใดขณะหนึ่งที่จรวดกำลังเคลื่อนที่ห่างออกไปจากกล้องมีหน่วยเป็น ฟุต/วินาที

$\frac{dx}{dt}$ = ความเร็วขณะใดขณะหนึ่งที่จรวดกำลังถูกยิงขึ้นในแนวดิ่งมีหน่วยเป็น ฟุต/วินาที

จากรูป 5.11 และจากทฤษฎีบทของพีทาโกรัส เราจะได้ว่า

$$y^2 = x^2 + (3,000)^2 \quad \dots\dots\dots (1)$$

จากสมการ (1) หาอนุพันธ์เทียบกับเวลา t ทั้งสองข้าง

$$\begin{aligned} \therefore \frac{dy^2}{dt} &= \frac{dx^2}{dt} + \frac{d}{dt}(3,000)^2 \\ 2y \frac{dy}{dt} &= 2x \frac{dx}{dt} + 0 \\ \therefore \frac{dy}{dt} &= \frac{2x}{2y} \cdot \frac{dx}{dt} \quad \dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

จาก (1); เมื่อ $x = 4,000$ ฟุต เราสามารถหาค่า y ได้ดังนี้

$$\begin{aligned} y &= \sqrt{(4,000)^2 + (3,000)^2} \\ &= 5,000 \text{ ฟุต} \end{aligned}$$

เมื่อ $x = 4,000$ ฟุต, $y = 5,000$ ฟุต และ $\frac{dx}{dt} = 880$ ฟุต/วินาที

$$\begin{aligned} \text{จาก (2); } \frac{dy}{dt} &= \frac{x}{y} \frac{dx}{dt} \\ \therefore \frac{dy}{dt} &= \frac{4,000}{5,000} (880) \\ &= 704 \text{ ฟุต/วินาที} \end{aligned}$$

ความเร็วขณะใดขณะหนึ่ง ที่จรวดกำลังเคลื่อนที่ห่างออกจากกล้อง

$$= 704 \text{ ฟุต/วินาที}$$

3. สุ่มนักศึกษาออกมาแสดงวิธีหาคำตอบของตัวอย่างบนกระดานโดยเพื่อนในห้องเป็นผู้ช่วยเหลือ
4. ให้นักศึกษาจำสูตรการหาอนุพันธ์ และสูตรการหาค่าเชิงอนุพันธ์ เพื่อนำไปใช้ในการหาค่าอนุพันธ์
5. นักศึกษาทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.3 ส่งอาจารย์
6. อาจารย์เฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.3 และให้นักศึกษาช่วยกันซักถามข้อสงสัย

ขั้นสรุปและการประยุกต์

7. นักศึกษาร่วมกันสรุปการประยุกต์อนุพันธ์ของฟังก์ชัน ทั้งหมดลงในสมุด
8. อาจารย์ให้นักศึกษาทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.4 ส่งตามกำหนด
9. อาจารย์ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.4 และชี้แจงข้อบกพร่องหรือข้อผิดพลาดให้นักศึกษาทราบ

สื่อการเรียนการสอน

1. หนังสือเรียนวิชา แคลคูลัสพื้นฐาน (3000-1406)

2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.3 และ 5.4
3. ใบความรู้

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.3 และ 5.4
3. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.3 และ 5.4
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการทำงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 5.3 และ 5.4 ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

ใบความรู้ สูตรต่างๆ

สูตรการหาอนุพันธ์	สูตรการหาค่าเชิงอนุพันธ์
1. $\frac{dc}{dx} = 0$	1. $dc = 0$
2. $\frac{d}{dx}(u+v-w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$	2. $d(u+v-w) = du+dv-dw$
3. $\frac{dx}{dx} = 1$	3. $dx = 1 \cdot dx$
4. $\frac{d}{dx}cu = c \frac{du}{dx}$	4. $d cu = c du$
5. $\frac{d}{dx}(uv) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$	5. $d(uv) = u dv + v du$
6. $\frac{d}{dx} \frac{u}{v} = \frac{1}{v^2} \left[v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right]$	6. $d \frac{u}{v} = \frac{1}{v^2} [v du - u dv]$
7. $\frac{d}{dx} u^n = n u^{n-1} \frac{du}{dx}$	7. $du^n = n u^{n-1} du$
8. $\frac{d}{dx} \sin u = \cos u \frac{du}{dx}$	8. $d \sin u = \cos u du$
9. $\frac{d}{dx} \cos u = -\sin u \frac{du}{dx}$	9. $d \cos u = -\sin u du$
10. $\frac{d}{dx} \tan u = \sec^2 u \frac{du}{dx}$	10. $d \tan u = \sec^2 u du$
11. $\frac{d}{dx} \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u \frac{du}{dx}$	11. $d \cot u = -\operatorname{cosec}^2 u du$
12. $\frac{d}{dx} \sec u = \sec u \tan u \frac{du}{dx}$	12. $d \sec u = \sec u \tan u du$
13. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u \frac{du}{dx}$	13. $d \operatorname{cosec} u = -\operatorname{cosec} u \cot u du$
14. $\frac{d}{dx} \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$	14. $d \sin^{-1} u = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} du$
15. $\frac{d}{dx} \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$	15. $d \cos^{-1} u = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} du$
16. $\frac{d}{dx} \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$	16. $d \tan^{-1} u = \frac{1}{1+u^2} du$
17. $\frac{d}{dx} \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$	17. $d \cot^{-1} u = \frac{-1}{1+u^2} du$

สูตรการหาอนุพันธ์	สูตรการหาค่าเชิงอนุพันธ์
18. $\frac{d}{dx} \sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$	18. $d\sec^{-1} u = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} du$
19. $\frac{d}{dx} \operatorname{cosec}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$	19. $d\operatorname{cosec}^{-1} u = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} du$
20. $\frac{d}{dx} \log_a u = \frac{1}{u} \log_a e \frac{du}{dx}$	20. $d\log_a u = \frac{1}{u} \log_a e du$
21. $\frac{d}{dx} \ln u = \frac{1}{u} \cdot \frac{du}{dx}$	21. $d\ln u = \frac{1}{u} \cdot du$
22. $\frac{d}{dx} a^u = a^u \ln a \frac{du}{dx}$	22. $da^u = a^u \ln a du$
23. $\frac{d}{dx} e^u = e^u \frac{du}{dx}$	23. $de^u = e^u du$