

# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 5

รหัสวิชา 3000-1406

วิชา แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 3 ชั่วโมงที่ 13-15

ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

## แนวคิด

อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต เป็นการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เขียนในรูปประพจน์ตัวแปรอิสระอันประกอบด้วยตัวแปรนั้นๆ กับเครื่องหมายทางพีชคณิตซึ่งการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตนอกจากใช้ทฤษฎีบทแล้วยังสามารถคำนวณค่าได้โดยการใช้สูตร

## สาระการเรียนรู้

- ความหมายของฟังก์ชันพีชคณิต
- ทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
- สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต

## ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

- บอกความหมายของฟังก์ชันพีชคณิตได้
- อธิบายทฤษฎีบทเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต
- บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตได้
- มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูต่อเวที

## กิจกรรมการเรียนการสอน

### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

- อาจารย์ทบทวนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

### ขั้นสอน

- แจกใบความรู้ให้นักศึกษาศึกษาความหมาย ทฤษฎีบท และสูตร การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต ในแบบต่างๆ
- ศึกษาตัวอย่างจากหนังสือและบนกระดานที่อาจารย์อธิบายพร้อมทั้งซักถามและเสนอแนะให้เพื่อนๆ ได้
- ให้นักศึกษาทำเอกสารแนะแนวทางโดยเปิดโอกาสให้ปรึกษากันกับเพื่อนๆ ได้
- ช่วยกันสรุปและอธิบายเพิ่มเติมเพื่อความเข้าใจมากขึ้น
- ทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.1

### ขั้นสรุปและการประยุกต์

- อาจารย์และนักศึกษาช่วยกันสรุปเพิ่มเติมเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลงในสมุดเพื่อให้ นักศึกษาได้นำไปประยุกต์ใช้ต่อไป
- อาจารย์ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ และชี้แจงข้อบกพร่องหรือข้อผิดพลาดให้นักศึกษาทราบ

## สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทาง
2. ใบความรู้

## การวัดผลและการประเมินผล

### วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจสอบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.1
3. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

### เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.1
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

### เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.1 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

## ใบความรู้ที่ 3.1

### ทฤษฎีบทที่ 1

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } f(x) &= c \text{ เมื่อ } c \text{ เป็นค่าคงตัว เราจะได้ว่า} \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{dc}{dx} = 0 \end{aligned}$$

### ทฤษฎีบทที่ 2

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } f(x) = x \text{ หรือ } y = x \text{ แล้ว เราจะได้ว่า} \\ \frac{d}{dx} f(x) = \frac{dy}{dx} = 1 \text{ หรือ } \frac{dx}{dx} = 1 \end{aligned}$$

### ทฤษฎีบทที่ 3

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } f(x) = c u(x) \text{ เมื่อ } u(x) \text{ เป็นฟังก์ชันของ } x \text{ และ } c \text{ เป็นค่าคงตัว เราจะได้ว่า} \\ \therefore \frac{d}{dx} f(x) \text{ หรือ } \frac{d}{dx} c u(x) = c \frac{d}{dx} u(x) = c \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

### ทฤษฎีบทที่ 4

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } f(x) = u(x) + v(x) - w(x) \text{ แล้ว} \\ \text{เราจะได้ว่า } \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} u(x) + \frac{d}{dx} v(x) - \frac{d}{dx} w(x) \end{aligned}$$

### ทฤษฎีบทที่ 5

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } f(x) = u(x) \cdot v(x) \text{ แล้ว} \\ \text{เราจะได้ว่า } \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} u(x) \cdot v(x) = u(x) \frac{d}{dx} v(x) + v(x) \frac{d}{dx} u(x) = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

### ทฤษฎีบทที่ 6

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } f(x) = \frac{u(x)}{v(x)} \text{ แล้ว เราจะได้ว่า} \\ \frac{d}{dx} f(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{u(x)}{v(x)} \right) = \frac{1}{[v(x)]^2} \left[ v(x) \frac{d}{dx} u(x) - u(x) \frac{d}{dx} v(x) \right] = \frac{1}{v^2} \left[ v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right] \end{aligned}$$

ทฤษฎีบทที่ 7

$$\begin{aligned} \text{ถ้า } f(x) &= [u(x)]^n \text{ แล้วเราจะได้ว่า} \\ \frac{d}{dx} f(x) &= \frac{d}{dx} [u(x)]^n = n(u(x))^{n-1} \frac{d}{dx} u(x) = nu^{n-1} \frac{du}{dx} \end{aligned}$$

สูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

$$1. \frac{dc}{dx} = 0$$

$$2. \frac{dx}{dx} = 1$$

$$3. \frac{d}{dx} cu = c \frac{du}{dx}$$

$$4. \frac{d}{dx} (u + v - w) = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

$$5. \frac{d}{dx} uv = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$$

$$6. \frac{d}{dx} \left( \frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} \left[ v \frac{du}{dx} - u \frac{dv}{dx} \right]$$

$$7. \frac{d}{dx} u^n = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

### เอกสารแนะแนวทาง 3.1

ตัวอย่างที่ 1

$$1. \frac{d5}{dx} = 0 \qquad 2. \frac{d}{dx}(-3) = 0$$

$$3. \frac{d10}{dx} = \dots\dots \qquad 4. \frac{d(-15)}{dx} = \dots\dots$$

ตัวอย่างที่ 2

$$1. \text{ ถ้า } y = 3x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} 3x = 3 \frac{dx}{dx} = 3$$

$$2. \text{ ถ้า } y = -2x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \dots\dots = \dots\dots \frac{d}{dx} \dots\dots = \dots\dots$$

ตัวอย่างที่ 3

$$1. \text{ ถ้า } y = x^2 + 3x - 1$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} (x^2 + 3x - 1) = \frac{dx^2}{dx} + \frac{d3x}{dx} - \frac{d1}{dx}$$

$$= 2x + 3$$

$$2. \text{ ถ้า } y = 4x^3 - 5x^2 + 7x - 10$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \dots\dots = \dots\dots$$

ตัวอย่างที่ 4

$$1. \frac{d}{dx} (x+5)(x-3) = (x+5) \frac{d}{dx} (x-3) + (x-3) \frac{d}{dx} (x+5)$$

$$2. \frac{d}{dx} (4x)(x+1) = 4x \frac{d}{dx} \dots\dots + (x+1) \frac{d}{dx} \dots\dots$$

$$3. \frac{d}{dx} (x^2 - 1)(3x) = \dots\dots$$

ตัวอย่างที่ 5

$$1. \frac{d}{dx} \frac{(x^2 + 3)}{x - 1} = \frac{1}{(x - 1)^2} \left[ (x - 1) \frac{d}{dx} (x^2 + 3) - (x^2 + 3) \frac{d}{dx} (x - 1) \right]$$

$$2. \frac{d}{dx} \frac{(3x - 1)}{x} = \frac{1}{\dots\dots} \left[ x \frac{d}{dx} \dots\dots - \dots\dots \frac{d}{dx} \dots\dots \right]$$

$$3. \frac{d}{dx} \frac{3x - 5}{x^2 + 2} = \dots\dots$$

### เฉลยเอกสารแนะแนวทาง 3.1

ตัวอย่างที่ 1

$$3. \frac{d10}{dx} = 0 \text{ ตอบ}$$

$$4. \frac{d(-15)}{dx} = 0 \text{ ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 2

$$3. \text{ ถ้า } y = -2x \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} -2x = -2 \frac{d}{dx} x = -2 \text{ ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 3

$$\begin{aligned} 2. \text{ ถ้า } y &= 4x^3 - 5x^2 + 7x - 10 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (4x^3 - 5x^2 + 7x - 10) \\ &= \frac{d(4x^3)}{dx} - \frac{d(5x^2)}{dx} + \frac{d7x}{dx} - \frac{d10}{dx} \\ &= 4 \frac{dx^3}{dx} - 5 \frac{dx^2}{dx} + 7 - 0 \\ &= 4 \left( 2x^{3-1} \frac{dx}{dx} \right) - 5 \left( 2x^{2-1} \frac{dx}{dx} \right) + 7 \\ \therefore \frac{dy}{dx} &= 12x^2 - 10x + 7 \text{ ตอบ} \end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 4

$$3. \frac{d}{dx} (4x)(x+1) = 4x \frac{d}{dx} (x+1) + (x+1) \frac{d}{dx} 4x \text{ ตอบ}$$

$$4. \frac{d}{dx} (x^2 - 1)(3x) = (x^2 - 1) \frac{d}{dx} (3x) + (3x) \frac{d}{dx} (x^2 - 1) \text{ ตอบ}$$

ตัวอย่างที่ 5

$$3. \frac{d}{dx} \frac{(3x-1)}{x} = \frac{1}{x^2} \left[ x \frac{d}{dx} (3x-1) - (3x-1) \frac{d}{dx} x \right] \text{ ตอบ}$$

$$4. \frac{d}{dx} \frac{3x-5}{x^2+2} = \frac{1}{(x^2+2)^2} \left[ (x^2+2) \frac{d}{dx} (3x-5) - (3x-5) \frac{d}{dx} (x^2+2) \right] \text{ ตอบ}$$

# แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 6

รหัสวิชา 3000-1406

วิชา แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 3 ชั่วโมงที่ 16-18

ชื่อหน่วย อนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิต (ต่อ)

## แนวคิด

- ถ้า  $y = f(u)$  และ  $u = F(x)$  เป็นฟังก์ชันที่สามารถหาอนุพันธ์เทียบกับ  $x$  ได้แล้ว เราจะได้ว่า  $y = f[F(x)]$  และสามารถหาอนุพันธ์ของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ได้จาก

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$$

- ถ้า  $y = f(u)$   $u = g(v)$  และ  $v = h(x)$  เราจะได้ว่า  $y = f(u(v(x)))$  ซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ของ  $y$  เทียบกับ  $x$  คือ

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dv} \cdot \frac{dv}{dx}$$

- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่เขียนอยู่ในรูปของสมการพาราเมตริก (Parametric Equation) ซึ่งเขียนอยู่ในรูปของ  $x = f(t)$  และ  $y = g(t)$  เราสามารถหาอนุพันธ์ของ  $y$  เทียบกับ  $x$  ได้ดังนี้

$$\text{จาก } \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}g(t) \text{ และ } \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}f(t)$$

$$\text{โดยอาศัยความรู้เรื่องกฎลูกโซ่ เราจะได้ว่า } \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} \text{ โดยที่ } \frac{dt}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dt}}$$

## สาระการเรียนรู้

- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตโดยใช้สูตร
- การหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยปริยาย
- การหาอนุพันธ์อันดับสูง

## ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

- บอกสูตรการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตได้
- คำนวณหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตได้
- มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูทวดเวที

## กิจกรรมการเรียนรู้การสอน

### ชั้นนำเข้าสู่บทเรียน

- อาจารย์ทบทวนเรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

### ขั้นสอน

2. อาจารย์อธิบายการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยใช้สูตรประกอบ สูตรอยู่ในใบความรู้ 3.1
3. ศึกษาตัวอย่างจากหนังสือและบนกระดานที่อาจารย์อธิบาย พร้อมทั้งซักถามและเสนอแนะ
4. ทำเอกสารแนะแนวทางโดยเปิดโอกาสให้ปรึกษากันกับเพื่อนๆ ได้
5. ทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.2

#### ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. อาจารย์และนักศึกษาช่วยกันสรุปเพิ่มเติมเกี่ยวกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันลงในสมุดเพื่อให้ นักศึกษาได้นำไปประยุกต์ใช้ต่อไป
7. อาจารย์ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.2 และชี้แจงข้อบกพร่องหรือข้อผิดพลาดให้นักศึกษาทราบ

#### สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทาง

#### การวัดผลและการประเมินผล

##### วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.2
3. การสังเกตและประเมินพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

##### เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.2
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

##### เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 3.2 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง



## เอกสารณะแนวทาง

จงหาอนุพันธ์ของฟังก์ชันพีชคณิตที่กำหนดให้ต่อไปนี้

1.  $y = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{5}x^5 - x^3 + 2x + 9$  .....

2.  $y = (x+2)(x-5)^4$  .....

3.  $y = \frac{x+7}{x-8}$  .....

4.  $y = x + \frac{x+3}{x+4}$  .....

5.  $y = \left(\frac{2x+3}{3x+4}\right)^5$  .....

จงใช้กฎลูกโซ่ในการหาค่าของ  $\frac{dy}{dx}$  จากฟังก์ชันต่อไปนี้

6.  $y = 2u^2 + 3u, \quad u = 3x + 7$  .....

7.  $y = \frac{u+3}{u+7}, \quad u = x^2 + 2x - 1$  .....

8.  $y = 3u + 5, \quad u = \sqrt{v} + 3v$  และ  $v = x + 4$  .....

9.  $x = t^2 + 5t, \quad y = \sqrt{t+3}$  .....

10.  $x = 3t + 4, \quad y = 4t^2 + 5t - 6$  .....

จากข้อ 11-13 จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$  และ  $\frac{dx}{dy}$

11.  $x^2 + 2xy - y^3 = 7$  .....

12.  $3x^2y + 3xy^2 = 9$  .....

13.  $x + 3xy + y^2 = 9x^2y$  .....

เฉลยเอกสารแนะแนวทาง

1.  $\left( \frac{dy}{dx} = x^5 + x^4 - 3x^2 + 2 \right)$

2.  $\left( \frac{dy}{dx} = (x-5)^3 (5x+3) \right)$

3.  $\left( \frac{dy}{dx} = \frac{-15}{(x-8)^2} \right)$

4.  $\left( \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{1}{(x+4)^2} \right)$

5.  $\left( \frac{dy}{dx} = \frac{-5(2x+3)^4}{(3x+4)^6} \right)$

จงใช้กฎลูกโซ่ในการหาค่าของ  $\frac{dy}{dx}$  จากฟังก์ชันต่อไปนี้

6.  $\left( \frac{dy}{dx} = 12(3x+7) \right)$

7.  $\left( \frac{dy}{dx} = \frac{8(x+1)^2}{(u+7)} \right)$

8.  $\left( \frac{dy}{dx} = 3(2x+11) \right)$

9.  $\left( \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2(2t+5)\sqrt{t+3}} \text{ เมื่อ } x = t^2 + 5t \right)$

10.  $\left( \frac{dy}{dx} = \frac{8t+5}{3} \text{ เมื่อ } x = 3t+4 \right)$

จากข้อ 11-13 จงหาค่า  $\frac{dy}{dx}$  และ  $\frac{dx}{dy}$

11.  $\left( \frac{dy}{dx} = \frac{-2(x+y)}{2x-3y^2} \text{ และ } \frac{dx}{dy} = \frac{3y^2-2x}{2(x-y)} \right)$

12.  $\left( \frac{dy}{dx} = \frac{-y(y+2x)}{x(x+2y)} \text{ และ } \frac{dx}{dy} = \frac{-x(x+2y)}{y(y+2x)} \right)$

13.  $\left( \frac{dy}{dx} = \frac{18xy-3y-1}{3x+2y-9x^2} \text{ และ } \frac{dx}{dy} = \frac{9x^2-3x-2y}{1+3y-8xy} \right)$