แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 13

รหัสวิชา 3000-1406 **วิชา** แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 6 **ชั่วโมงที่** 37-39 **ชื่อหน่วย** การอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

แนวคิด

การอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (Indefinite Integral) คือ การหาค่าของฟังก์ชัน เมื่อมีการกำหนดอนุพันธ์ของฟังก์ชันมาให้ โดยเรียกอนุพันธ์ของฟังก์ชันที่กำหนดมาให้ว่า **อินทิแกรนด์ฟังก์ชัน** อีกความหมายของการอินทิกรัลไม่จำกัดเขต เราเรียกว่า ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative) ในการคำนวณหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันต่างๆ นั้น อาจแทนค่าได้โดยตรง หรืออาจต้องมีการแปลงฟังก์ชันที่ต้องการอินทิเกรตให้เป็นฟังก์ชันใหม่ที่ง่ายขึ้น

สาระการเรียนรู้

1. ความหมายของปฏิยานุพันธ์
2. การหาค่าของปฏิยานุพันธ์
3. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดขอบเขตของฟังก์ชันพีชคณิต

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกความหมายของปฏิยานุพันธ์ของฟังก์ชันได้
2. หาค่าของปฏิยานุพันธ์ได้
3. คำนวณหาค่าของอินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิตได้
4. มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูกตเวที

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. อาจารย์ซักถามกับนักศึกษาถึงเรื่องที่เรียนมาแล้วว่ามีความเข้าใจมากน้อยแค่ไหน ซึ่งเป็นพื้นฐานของเรื่องที่จะเรียนต่อไป

ขั้นสอน

2. อาจารย์แจกใบความรู้พร้อมทั้งอธิบายความหมาย การหาค่าของปฏิยานุพันธ์ และการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดขอบเขตของฟังก์ชันพีชคณิต พร้อมตัวอย่างเพื่อให้นักศึกษาเข้าใจและนำไปใช้ได้
3. อาจารย์ยกตัวอย่างบนกระดานเพิ่มเติมจากใบความรู้ เปิดโอกาสให้นักศึกษาซักถามและช่วยกันคิด

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int (7x+2)^5 \, dx$

ในที่นี้ u ควรจะเป็น 7x + 2 เราอาจใช้การแปลง dx ให้เป็น du จะได้เป็น d(7x + 2) = 7dx

$\therefore \quad dx \quad = \quad \dfrac{d(7x+2)}{7}$ ซึ่งเราจะได้ว่า

$$\int (7x+2)^5\,dx = \int (7x+2)^5 \frac{d(7x+2)}{7}$$

$$= \frac{1}{7}\int (7x+2)^5\, d(7x+2)$$

$$= \frac{1}{7}\frac{(7x+2)^{5+1}}{5+1} + C$$

$$= \frac{1}{7}\frac{(7x+2)^{6}}{6} + C$$

$$\therefore \int (7x+2)^5\,dx = \frac{1}{42}(7x+2)^6 + C$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int \frac{dx}{3x+2}$

ให้ $u = 3x + 2 \quad \therefore \quad du = d(3x+2) = 3dx$

$$\therefore \quad dx = \frac{du}{3} = \frac{d(3x+2)}{3}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{3x+2} = \int \frac{d(3x+2)}{(3x+2)(3)}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{d(3x+2)}{3x+2}$$

$$= \frac{1}{3}\ln\left|3x+2\right| + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{3x+2} = \frac{1}{3}\ln\left|3x+2\right| + C$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ y ในเทอมของ x จากสมการ $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$ และหาค่าของ C เมื่อ $x = 2$, $y = 9$

จาก $\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 2x$

$\therefore \quad dy = (3x^2 + 2x)\,dx$

อินทิเกรตทั้งสองข้าง เราจะได้ว่า

$$\int dy = \int (3x^2 + 2x)dx$$

$$\int dy = 3\int x^2 dx + 2\int x dx$$

$$\therefore \quad y = 3\left(\frac{x^{2+1}}{2+1}\right) + 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + C$$

$$y = 3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + C$$

$$y = x^3 + x^2 + C$$

เนื่องจาก $x = 2,\ y = 9$ ดังนั้น

$$9 = 2^3 + 2^2 + C$$

$\therefore \quad C = 9 - 8 - 4 = -3$

$C = -3$

ดังนั้น $y = x^3 + x^2 - 3$

4. อาจารย์ให้นักศึกษาทำเอกสารแนะแนวทางโดยถามกันได้เพื่อช่วยกันระดมความคิด หาคำตอบ
5. อาจารย์และนักศึกษาช่วยกันเฉลยเอกสารแนะแนวทาง

ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. อาจารย์และนักศึกษาช่วยกันสรุปสูตรของ การหาค่าของปฏิยานุพันธ์
7. นักศึกษาทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.1
8. อาจารย์ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.1 และชี้แจงข้อบกพร่องหรือข้อผิดพลาดให้นักศึกษาทราบ

สื่อการเรียนการสอน

1. หนังสือเรียนวิชา แคลคูลัสพื้นฐาน (3000-1406)
2. ใบความรู้
3. เอกสารแนะแนวทาง

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.1
3. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.1
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.1 ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

ใบความรู้

ความหมายของปฏิยานุพันธ์

ปฏิยานุพันธ์ (Antiderivative) เป็นการดำเนินการทางคณิตศาสตร์อย่างหนึ่งที่ตรงข้าม หรือผันกลับกับการหาอนุพันธ์ของฟังก์ชัน เราเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า การอินทิเกรต (Integration) เช่น

กำหนดให้ $y = f(x)$

อนุพันธ์ของฟังก์ชันเทียบกับ x คือ $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

ค่าเชิงอนุพันธ์ของฟังก์ชัน คือ $dy = f'(x)dx$

การอินทิเกรต คือ การหาว่า $f'(x)dx$ เป็นค่าเชิงอนุพันธ์ (differential) ของฟังก์ชันใดๆ ซึ่งผลลัพธ์ของการอินทิเกรตนี้ เราเรียกว่า อินทิกรัล (Integral) ซึ่งเราจะได้ว่า อินทิกรัลตัวหนึ่งของ $f'(x)dx$ คือ $f(x)$ ค่าอินทิกรัลของ $f'(x)dx$ นี้ มีหลายค่าด้วยกัน $f(x)+c$ เป็นอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $f'(x)dx$ เพราะว่าค่าคงตัว c จะมีค่าใดๆ ก็ได้ไม่จำกัด

นิยาม ถ้าฟังก์ชัน $y = f(x)$ เป็นคำตอบหนึ่งของสมการเชิงอนุพันธ์ $dy = f'(x)dx$ และ $f(x)$ หาอนุพันธ์ได้ และ $\frac{df}{dx}(x) = f'(x)$ แล้วเรียก $f(x)$ ว่า เป็นอินทิกรัลของ $f'(x)$ เทียบกับ x

ถ้า $f(x)$ เป็นอินทิกรัลของ $f'(x)$ เทียบกับ x แล้ว $f(x) + c$ จะเป็นอินทิกรัลของ $f'(x)$ เทียบกับ x ด้วย เมื่อ c เป็นค่าคงตัวใดๆ เพราะค่า

$$\frac{d}{dx}[f(x)+c] = \frac{d}{dx}f(x)+\frac{d}{dx}c$$

$$= f'(x) + 0 = f'(x) \quad \text{นั่นเอง}$$

การหาค่าของปฏิยานุพันธ์

ค่าของปฏิยานุพันธ์ที่ได้มีความหมายเดียวกับการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขตของ $f(x)dx$ หรือ $\int f(x)dx$ ซึ่งเราต้องทราบ $f'(x) = f(x)$ แล้วคำตอบที่ได้ $f(x) + c$

การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดขอบเขตของฟังก์ชันพีชคณิต

ในการหาค่าอินทิกรัลไม่จัดเขตของฟังก์ชันพีชคณิต สามารถหาได้โดยการใช้สูตร โดยให้นึกถึงความรู้เรื่องค่าเชิงอนุพันธ์ (Differential) ของฟังก์ชันก่อน แล้วย้อนไปหาฟังก์ชันเดิม ก็จะทำให้เราสามารถหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันพีชคณิตเหล่านั้นได้เสมอ เช่น $f(x) = x^2$

$\therefore \quad f'(x) = 2x$ ดังนั้น $\int f'(x)\,dx = f(x) + C$

$\therefore \quad \int 2x \, dx = x^2 + C$

เมื่อกำหนดให้ u, v และ w เป็นฟังก์ชันของตัวแปรอิสระ (เช่น x) ซึ่งเราสามารถหาอนุพันธ์ได้ a, n และ c เป็นค่าคงตัวแล้ว เราจะใช้สูตรของค่าเชิงอนุพันธ์ เทียบกับสูตรการหาค่าอินทิกรัลดังนี้

สูตรค่าเชิงอนุพันธ์	สูตรของการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต
1. $du = du$	1. $\int du = u + C$
2. $dau = a\,du$	2. $\int adu = a\int du$
3. $d(u + v - w) = du + dv - dw$	3. $\int d(u + v - w) = \int du + \int dv - \int dw$
4. $du^n = nu^{n-1}du$	4. $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + C$ เมื่อ $n \neq -1$
5. $d(\ln u) = \frac{1}{u}\,du$	5. $\int \frac{du}{u} = \ln\lvert u\rvert + C$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int (2x+3)dx$

$$\begin{aligned}
\int (2x+3)dx &= \int 2xdx + \int 3dx \\
&= 2\int xdx + 3\int dx \\
&= 2\left(\frac{x^{1+1}}{1+1}\right) + 3x + C \\
&= \frac{2x^2}{2} + 3x + C \\
\therefore \int (2x+3)dx &= x^2 + 3x + C
\end{aligned}$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int \frac{x^4 - 6x^2 + 7}{x^4}dx$

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^4 - 6x^2 + 7}{x^4}dx &= \int \frac{x^4}{x^4}dx - 6\int \frac{x^2}{x^4}dx + 7\int \frac{dx}{x^4} \\
&= \int dx - 6\int x^{-2}dx + 7\int x^{-4}dx \\
&= x - 6\frac{x^{-2+1}}{-2+1} + 7\frac{x^{-4+1}}{-4+1} + C \\
&= x - 6\frac{x^{-1}}{-1} + \frac{7x^{-3}}{-3} + C \\
\therefore \int \frac{x^4 - 6x^2 + 7}{x^4}dx &= x + \frac{6}{x} - \frac{7}{3x^3} + C
\end{aligned}$$

เอกสารแนะแนวทาง

1. จงหาค่าของ $\int (2x+3)dx$

2. จงหาค่า $\int (x^2+3x-5)dx$

3. จงหาค่า $\int (3s+4)^2 ds$

4. จงหาค่า $\int (x^3+2)^2 3x^2 dx$

เฉลยเอกสารแนะแนวทาง

1. จงหาค่าของ $\int(2x+3)dx$

วิธีทำ
$$\int(2x+3)dx = \int 2xdx + \int 3dx$$
$$= 2\int xdx + 3\int dx$$
$$= \frac{2x^2}{2} + 3x + C$$
$$\therefore \int(2x+3)dx = x^2 + 3x + C$$ **ตอบ**

2. จงหาค่า $\int(x^2+3x-5)dx$

วิธีทำ
$$\int(x^2+3x-5)dx = \int x^2dx + \int 3xdx - \int 5dx$$
$$= \int x^2dx + 3\int xdx - 5\int dx$$
$$= \frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} - 5x + C$$
$$\therefore \int(x^2+3x-5)dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 5x + C$$ **ตอบ**

3. จงหาค่า $\int(3s+4)^2 ds$

วิธีทำ
$$\int(3s+4)^2 ds = \int(3s+4)^2 \frac{d(3s+4)}{3}$$
$$= \frac{1}{3}\int(3s+4)^2 d(3s+4)$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(3s+4)^{2+1}}{2+1} + C$$
$$= \frac{1}{3}\frac{(3s+4)^3}{3} + C$$
$$\therefore \int(3s+4)^2 ds = \frac{1}{9}(3s+4)^3 + C$$ **ตอบ**

4. จงหาค่า $\int(x^3+2)^2 3x^2dx$

วิธีทำ
$$\int(x^3+2)^2 3x^2dx = \int(x^3+2)^2 d(x^3+2)$$
$$= \frac{(x^3+2)^{2+1}}{2+1} + C$$
$$\therefore \int(x^3+2)^2 3x^2dx = \frac{(x^3+2)^3}{3} + C$$ **ตอบ**

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 14

รหัสวิชา 3000-1406 **วิชา** แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 6 **ชั่วโมงที่** 40-42 **ชื่อหน่วย** การอินทิกรัลไม่จำกัดเขต

แนวคิด

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติบางครั้งจะอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันคูณกัน หรืออยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง จะไม่สามารถอินทิเกรตได้ทันทีต้องมีการดัดแปลงฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านั้นก่อน จึงจะสามารถอินทิเกรตได้สะดวกขึ้น แบ่งลักษณะโจทย์ดังกล่าวออกเป็น 6 ลักษณะ คือ

1. $\int \sin^n x dx$ หรือ $\int \cos^n x dx$
2. $\int \sin^m \cos^n x dx$
3. $\int \sin Ax.\cos Bxdx$, $\int \sin Ax.\sin Bxdx$, $\int \cos Ax.\cos Bxdx$
4. $\int \tan^n x dx$ หรือ $\int \cot^n x dx$
5. $\int \sec^n x dx$ หรือ $\int \text{cosec}^n x dx$
6. $\int \tan^m x.\sec^n x dx$ หรือ $\int \cot^m x.\text{cosec}^n x dx$

สาระการเรียนรู้

4. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดขอบเขตของฟังก์ชันอดิศัยโดยใช้สูตร

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

4. คำนวณหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดขอบเขตของฟังก์ชันอดิศัยโดยใช้สูตรได้
5. มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูกตเวที

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. อาจารย์แจกใบงานของเรื่องที่แล้วให้นักศึกษาลองทำเพื่อเป็นการทบทวน

ขั้นสอน

2. ในหัวข้อนี้จะมีตัวอย่างการหาคำตอบโดยการใช้สูตรที่เรียนมาเป็นพื้นฐาน เพราะฉะนั้นอาจารย์ จะแจกใบความรู้ที่สรุปสูตรมาให้นักศึกษาไว้ท่องจำเพื่อเป็นการทบทวน
3. อาจารย์ยกตัวอย่าง อธิบายให้นักศึกษาฟังและคิดตามพร้อมทั้งมีการซักถามในขณะที่อธิบายได้เต็มที่

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\int \sin(2x+3)dx$

ใช้สูตร $\int \sin u du = -\cos u + C$

โดยเลือกให้ $u = 2x+3$ $\therefore$ $du = d(2x + 3) = 2dx$

ดังนั้น $dx = \frac{du}{2} = \frac{d(2x+3)}{2}$

$$\therefore \int \sin(2x+3)dx = \int \sin(2x+3)\frac{d(2x+3)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\int \sin(2x+3)d(2x+3)$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\cos(2x+3)\right]+C$$

ดังนั้น $\int \sin(2x+3)dx = -\frac{1}{2}\cos(2x+3)+C$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int \cos^4 xdx$

$$\int \cos^4 xdx = \int (\frac{1}{2}(1+\cos 2x))^{\frac{4}{2}}\, dx$$

$$= \int (\frac{1}{2}(1+\cos 2x))^{2}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}\int dx+\frac{1}{4}\int 2\cos 2xdx+\frac{1}{4}\int \cos^2 2x\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\int \cos 2xd(2x)+\frac{1}{4}\int (\frac{1}{2}(1+\cos 2(2x))^{\frac{2}{2}}\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\, dx$$

$$= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int \cos 4x.\frac{d4x}{4}$$

$$= \frac{1}{4}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{32}\int \cos 4xd4x$$

ดังนั้น $\int \cos^4 xdx = \frac{3}{8}x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\int \sin^3 x.\cos^2 xdx$

$$\int \sin^3 x.\cos^2 xdx = -\int (1-\cos^2 x)^{\frac{3-1}{2}}.\cos^2 xd\cos x$$

$$= -\int (1-\cos^2 x).\cos^2 xd\cos x$$

$$= -\int \cos^2 xd\cos x+\int \cos^4 xd\cos x$$

$$= -\frac{1}{3}\cos^3 x+\frac{1}{5}\cos^5 x+C$$

ดังนั้น $\int \sin^3 x.\cos^2 xdx = \frac{1}{5}\cos^5 x-\frac{1}{3}\cos^3 x+C$

4. อาจารย์ให้นักศึกษาทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.2 ส่งในชั่วโมงต่อไป

ขั้นสรุปและการประยุกต์

5. อาจารย์ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.2 และชี้แจงข้อบกพร่องหรือข้อผิดพลาดให้นักศึกษาทราบ
6. อาจารย์และนักศึกษาช่วยกับสรุปสูตรอีกครั้ง

สื่อการเรียนการสอน

1. หนังสือเรียนวิชา แคลคูลัสพื้นฐาน (3000-1406)
2. ใบความรู้
3. ใบงาน

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.2
3. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล (ภาคผนวก ข)
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.2
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.2 ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

ใบงาน

1. $\int \frac{dx}{x^n}$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{-1}{nx^{n-1}} + C$

ข. $\frac{-1}{(n-1)x^{n-1}} + C$

ค. $\frac{1}{nx^{n-1}} + C$

ง. $\frac{1}{(n-1)x^{n-1}} + C$

2. $\int (1-x)\sqrt{x}dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

ข. $\frac{2}{3}x^{-\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{-\frac{5}{2}} + C$

ค. $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

ง. $-\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{5}x^{-\frac{5}{2}} + C$

3. $\int (x^2+1)^2 dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{x^5}{5} + \frac{2x^3}{3} + x + C$

ข. $\frac{x^5}{4} + \frac{x^3}{2} + x + C$

ค. $\frac{x^5}{5} + \frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} + C$

ง. $\frac{5x^5}{4} + \frac{3x^2}{2} + x + C$

4. $\int (7x-2)^3 dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{21x^2}{3} + \frac{8x}{3} + x + C$

ข. $\frac{28x^3}{7} + \frac{3x^2}{7} + \frac{2x}{7} + C$

ค. $\frac{(7x-2)^4}{4} + C$

ง. $\frac{(7x-2)^4}{28} + C$

5. $\int 3x\sqrt{1-2x^2}dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $-\frac{3}{4}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

ข. $-\frac{2}{3}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

ค. $-\frac{1}{2}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

ง. $-\frac{1}{3}(1-2x^2)^{\frac{3}{2}} + C$

6. $\int (x^3+2)^2(3x^2)dx$ มีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{1}{2}(x^3+2)^2 + C$

ข. $\frac{1}{2}(x^3+2)^3 + C$

ค. $\frac{1}{3}(x^3+2)^2 + C$

ง. $\frac{1}{3}(x^3+2)^3 + C$

เฉลยใบงาน

1. ข	2. ค	3. ก	4. ง	5. ค	6. ง

ใบความรู้

1. $d \sin u = \cos u\, du$

$\therefore \int \cos u\, du = \int d \sin u$

ดังนั้น $\int \cos u\, du = \sin u + C$ **สูตรที่ 1**

2. $d \cos u = -\sin u\, du$

$\int \sin u\, du = -\int d \cos u$

ดังนั้น $\int \sin u\, du = -\cos u + C$ **สูตรที่ 2**

3. $d \tan u = \sec^2 u\, du$

$\therefore \int \sec^2 u\, du = \int d \tan u$

ดังนั้น $\int \sec^2 u\, du = \tan u + C$ **สูตรที่ 3**

4. $d \cot u = -\mathrm{cosec}^2 u\, du$

$\therefore \int \mathrm{cosec}^2 u\, du = -\int d \cot u$

ดังนั้น $\int \mathrm{cosec}^2 u\, du = -\cot u + C$ **สูตรที่ 4**

5. $d \sec u = \sec u . \tan u\, du$

$\therefore \int \sec u . \tan u\, du = \int d \sec u$

ดังนั้น $\int \sec u . \tan u\, du = \sec u + C$ **สูตรที่ 5**

6. $d\, \mathrm{cosec}\, u = -\mathrm{cosec}\, u . \cot u . du$

$\therefore \int \mathrm{cosec}\, u . \cot u . du = -\int d\, \mathrm{cosec}\, u$

ดังนั้น $\int \mathrm{cosec}\, u . \cot u . du = -\mathrm{cosec}\, u + C$ **สูตรที่ 6**

เราสามารถนำความรู้จากเรื่อง ค่าเชิงอนุพันธ์มาประยุกต์หรือดัดแปลงสร้างสูตรเพิ่มเติมได้อีก 4 สูตร ดังนี้

7. $\int \tan u du = \ln |\sec u| + C$

$$\therefore \int \tan u du = -\int \frac{d \cos u}{\cos u}$$

$$= -\ln |\cos u| + C$$

$$= \ln |(\cos u)^{-1}| + C$$

$$= \ln \left|\frac{1}{\cos u}\right| + C$$

ดังนั้น $\int \tan u du = \ln |\sec u| + C$ **สูตรที่ 7**

8. $\int \cot u du = \ln |\sin u| + C$

พิสูจน์จาก $\int \cot u du = \int \frac{\cos u}{\sin u} du$

$= \int \frac{d \sin u}{\sin u}$

$= \ln |\sin u| + C$

ดังนั้น $\int \cot u du = \ln |\sin u| + C$ **สูตรที่ 8**

9. $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$

พิสูจน์จาก $\int \sec u du = \int \frac{\sec u.(\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u} du$

$= \int \frac{\sec^2 u + \sec u.\tan u}{\sec u + \tan u} du$

$= \int \frac{(\sec u.\tan u + \sec^2 u)du}{\sec u + \tan u}$

$= \int \frac{d(\sec u + \tan u)}{\sec u + \tan u}$

$= \ln |\sec u + \tan u| + C$

ดังนั้น $\int \sec u du = \ln |\sec u + \tan u| + C$ **สูตรที่ 9**

10. $\int \operatorname{cosec} u du = \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + C$

พิสูจน์จาก $\int \operatorname{cosec} u du = \int \frac{\operatorname{cosec} u (\operatorname{cosec} u - \cot u)}{\operatorname{cosec} u - \cot u}$

$= \int \frac{(\operatorname{cosec}^2 u - \operatorname{cosec} u . \cot u)du}{\operatorname{cosec} u - \cot u}$

$= \int \frac{-(\operatorname{cosec} u . \cot u - \operatorname{cosec}^2 u)du}{\operatorname{cosec} u - \cot u}$

$= \int \frac{d(\operatorname{cosec} u - \cot u)}{\operatorname{cosec} u - \cot u}$

ดังนั้น $\int \operatorname{cosec} u du = \ln |\operatorname{cosec} u - \cot u| + C$ **สูตรที่ 10**

การอินทิเกรตฟังก์ชันตรีโกณมิติบางครั้งจะอยู่ในรูปผลคูณของฟังก์ชัน 2 ฟังก์ชันคูณกัน หรืออยู่ในรูปของฟังก์ชันตรีโกณมิติยกกำลัง จะไม่สามารถอินทิเกรตได้ทันทีต้องมีการดัดแปลงฟังก์ชันตรีโกณมิติเหล่านั้นก่อน จึงจะสามารถอินทิเกรตได้สะดวกขึ้น แบ่งลักษณะโจทย์ดังกล่าวออกเป็น 6 ลักษณะ คือ

1. $\int \sin^n x dx$ หรือ $\int \cos^n x dx$
2. $\int \sin^m \cos^n x dx$
3. $\int \sin Ax.\cos Bx dx$, $\int \sin Ax.\sin Bx dx$, $\int \cos Ax.\cos Bx dx$
4. $\int \tan^n x dx$ หรือ $\int \cot^n x dx$

5. $\int \sec^{n} x dx$ หรือ $\int \mathrm{cosec}^{n} x dx$

6. $\int \tan^{m} x . \sec^{n} x dx$ หรือ $\int \cot^{m} x . \mathrm{cosec}^{n} x dx$

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 15

รหัสวิชา 3000-1406 **วิชา** แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 6 **ชั่วโมงที่** 43-45 **ชื่อหน่วย** การอินทิกรัลไม่จำกัดเขต (ต่อ)

แนวคิด

เมื่อจัดฟังก์ชันเข้าไปในลักษณะของ Binomial 's coefficient จะจัดได้ใน 3 รูปแบบ คือ $u^2 + a^2$, $u^2 - a^2$ และ $a^2 - u^2$ ซึ่งจะมีสูตรมาช่วยในการอินทิเกรต คือ

1. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$
2. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$
3. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

เมื่อการอินทิเกรตอยู่ในรูปของรากที่สองของ $\sqrt{ax^2 + bx + c}$ เราจะสนใจเฉพาะกรณีที่ $ax^2 + bx + C > 0$ เท่านั้น นั่นคือ เราจะสนใจในกรณี

(1) เมื่อ $a > 0$ และ $B > 0$

(2) เมื่อ $a < 0$ และ $B < 0$ และ $B < u^2$

สาระการเรียนรู้

5. การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดขอบเขตของฟังก์ชันชี้กำลัง
6. การหาค่าของไบโนเมียลอินทิกรัล
7. การหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายรากที่ 2

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

5. คำนวณหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันชี้กำลังได้
6. คำนวณหาค่าของอินทิกรัล โดยใช้หลักการไบโนเมียลได้
7. คำนวณหาค่าของอินทิกรัลฟังก์ชันที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายรากได้
8. มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูกตเวที

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. อาจารย์สนทนากับนักศึกษาเกี่ยวกับการอินทิกรัลเพื่อเป็นการทบทวน

ขั้นสอน

2. อาจารย์จัดการเรียนเป็นกลุ่มๆ โดยเลือกประธาน เลขานุการ ผู้ประเมิน และให้นักศึกษาทำเอกสารแนะแนวทางที่ 1-3 เรื่อง การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดขอบเขตของฟังก์ชันชี้กำลัง การหาค่าของไบโนเมียลอินทิกรัล และการหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายรากที่ 2
3. อาจารย์และนักศึกษาช่วยกันสรุปและเฉลยเอกสารแนะแนวทางบนกระดาน โดยให้ส่งตัวแทนกลุ่มที่มีความเข้าใจ เพื่อฝึกการถ่ายทอดให้กับเพื่อนๆ
4. ทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.3
5. อาจารย์เฉลยแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.3 บนกระดาน

ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. อาจารย์และนักศึกษาช่วยกันสรุปสูตรของการหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดเขต
7. นักศึกษาทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.4 และ 6.5 ส่งตามกำหนด
8. อาจารย์ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.4 และ 6.5 และชี้แจงข้อบกพร่องหรือข้อผิดพลาดให้นักศึกษาทราบ

สื่อการเรียนการสอน

1. หนังสือเรียนวิชา แคลคูลัสพื้นฐาน (3000-1406)
2. ใบความรู้

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. สังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
3. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.3, 6.4 และ 6.5
4. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม
3. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.3, 6.4 และ 6.5
4. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบสังเกตพฤติกรรมการเข้าร่วมกิจกรรมกลุ่ม เกณฑ์ผ่าน 50% ขึ้นไป
3. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 6.3, 6.4 และ 6.5 ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
4. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

เอกสารแนะแนวทางที่ 1

เรื่อง การหาค่าอินทิกรัลไม่จำกัดขอบเขตของฟังก์ชันชี้กำลัง

สูตรที่ 1 $\int a^u \, du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

สูตรที่ 2 $\int e^u \, du = e^u + C$

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่า $\int 3^{3x} \, dx$

ในที่นี้ $a = 3, \quad u = 3x$

$$\therefore \quad du = d3x = 3dx$$

$$\therefore \quad \frac{du}{3} = dx$$

$$\therefore \quad \int a^u \, du = \frac{a^u}{\ln a} + C$$

$$\therefore \quad \int 3^{3x} \frac{d3x}{3} = \frac{3^{3x}}{3\ln 3} + C$$

$$\therefore \quad \int 4^{2x} \, dx = \frac{4^{2x}}{2.\ln 4} + C$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\int \dfrac{dx}{3^{2x}}$

$$\int \frac{dx}{3^{2x}} = \int 3^{-2x} \, dx$$

$$= \int 3^{-2x} \frac{d(-2x)}{-2}$$

$$= -\frac{1}{2} \int 3^{-2x} d(-2x)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\frac{3^{-2x}}{\ln 3} \right) + C$$

$$= -\frac{3^{-2x}}{2\ln 3} + C$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{3^{2x}} = -\frac{3^{-2x}}{2\ln 3} + C$$

1. จงหา $\int 4^{2x}dx$

....

....

....

....

2. จงหา $\int x^2 e^{x^3+5}dx$

....

....

....

....

เฉลย

1. จงหา $\int 4^{2x}dx$

$$
\begin{aligned}
\int 4^{2x}dx &= \int 4^{2x}.\frac{d2x}{2} \\
&= \frac{1}{2}\int 4^{2x}d2x \\
&= \frac{1}{2}.\frac{4^{2x}}{\ln 4} + C
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \int 4^{2x}dx = \frac{4^{2x}}{2.\ln 4} + C$$

2. จงหา $\int x^2 e^{x^3+5}dx$

$$
\begin{aligned}
\int x^2 e^{x^3+5}dx &= \int e^{x^3+5}\frac{d(x^3+5)}{3} \\
&= \frac{1}{3}\int e^{x^3+5}d(x^3+5)
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad \int x^2 e^{x^3+5}dx = \frac{1}{3}e^{x^3+5} + C$$

เอกสารแนะแนวทางที่ 2
เรื่อง การหาค่าของไบโนเมียลอินทิกรัล

เมื่อจัดฟังก์ชันเข้าไปในลักษณะของ Binomial 's coefficient จะจัดได้ใน 3 รูปแบบ คือ $u^2 + a^2$, $u^2 - a^2$ และ $a^2 - u^2$ ซึ่งจะมีสูตรมาช่วยในการอินทิเกรต คือ

1. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 + a^2} = \frac{1}{a}\arctan\frac{u}{a} + C$

2. $\displaystyle\int \frac{du}{u^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$

3. $\displaystyle\int \frac{du}{a^2 - u^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+u}{a-u}\right| + C$

ตัวอย่างที่ 1 จงหา $\displaystyle\int \frac{dx}{9x^2 + 16}$

$$\int \frac{dx}{9x^2+16} = \int \frac{dx}{(3x)^2 + 4^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d3x}{(3x)^2 + 4^2}$$

แทนค่า u = 3x, a = 4 ในสูตร จะได้ว่า

$$\int \frac{dx}{9x^2+16} = \frac{1}{3(4)}\arctan(\frac{3x}{4}) + C \quad \text{สูตรที่ 1}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{9x^2+16} = \frac{1}{12}\arctan\frac{3x}{4} + C$$

ตัวอย่างที่ 2 จงหา $\displaystyle\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$

$$\int \frac{dx}{4x^2-9} = \int \frac{dx}{(2x)^2 - 3^2} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(2x)^2 - 3^2}$$

โดยที่ u = 2x, a = 3 ดังนั้น

$$\int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C \quad \text{สูตรที่ 2}$$

$$\therefore \quad \int \frac{dx}{4x^2-9} = \frac{1}{6}\ln\left|\frac{2x-3}{2x+3}\right| + C$$

ตัวอย่างที่ 3 จงหาค่าของ $\displaystyle\int \frac{dz}{4 - 9z^2}$

$$\int \frac{dz}{4-9z^2} = \frac{1}{3}\int \frac{d(3z)}{2^2 - (3z)^2} \quad \text{เลือกให้ } a = 2,\ u = 3z$$

ดังนั้น

$$\frac{1}{3}\int \frac{d(3z)}{2^2-(3z)^2} = \frac{1}{3}\left[\frac{1}{2(2)}\ln\left|\frac{2+3z}{2-3z}\right|\right] + C \quad \text{สูตรที่ 3}$$

$$= \frac{1}{12}\ln\left|\frac{2+3z}{2-3z}\right| + C$$

1. จงหา $\int \frac{dx}{x^2+10x+29}$

....

....

....

2. จงหาค่า $\int \frac{dx}{x^2-4x}$

....

....

....**เฉลย**

1. จงหา $\int \frac{dx}{x^2+10x+29}$

พิจารณา $x^2 + 10x + 29 = x^2 + 10x + 25 + 4 = (x+5)^2 + 2^2$

$\therefore$ ให้ $u = x + 5$ $\therefore$ $du = dx$ และ $a = 2$ ดังนั้น

$$\int \frac{dx}{x^2+10x+29} = \int \frac{d(x+5)}{(x+5)^2+2^2}$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+5}{2}\right) + C$$

ดังนั้น $$\int \frac{dx}{x^2+10x+29} = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{x+5}{2}\right) + C$$

2. จงหาค่า $\int \frac{dx}{x^2-4x}$

□ พิจารณา $x^2 - 4x = x^2 - 4x + 4 - 4 = (x-2)^2 - 2^2$

ดังนั้นให้ $u = x - 2$ $\therefore$ $du = d(x-2)$ และ $a = 2$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-4x} = \int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2-2^2}$$

จากสูตร $$\int \frac{du}{u^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right| + C$$

ดังนั้น $$\int \frac{d(x-2)}{(x-2)^2-2^2} = \frac{1}{2(2)}\ln\left|\frac{(x-2)-2}{(x-2)+2}\right| + C$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2-4x} = \frac{1}{4}\ln\left|\frac{x-4}{x}\right| + C$$

เอกสารแนะแนวทางที่ 3

เรื่อง การหาค่าอินทิกรัลของฟังก์ชันที่อยู่ภายใต้เครื่องหมายรากที่ 2

สูตรช่วยในการอินทิเกรตเพิ่มเติม 7 สูตร คือ

1. $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

2. $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2 - a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{u}{a} + C$

3. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 + a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

4. $\int \frac{du}{\sqrt{u^2 - a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

5. $\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{u}{a} + C$

6. $\int \sqrt{u^2 + a^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 + a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 + a^2}\right| + C$

7. $\int \sqrt{u^2 - a^2}\, du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2 - a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 - a^2}\right| + C$

ตัวอย่าง จงหา $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}}$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{5^2 - (4x)^2}} = \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{5^2 - (4x)^2}}$$

ให้ $u = 4x$, $a = 5$

จากสูตร $\int \frac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \arcsin\frac{u}{a} + C$

$\therefore \quad \frac{1}{4}\int \frac{d(4x)}{\sqrt{5^2 - (4x)^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{5} + C$

ดังนั้น $\int \frac{dx}{\sqrt{25 - 16x^2}} = \frac{1}{4}\arcsin\frac{4x}{5} + C$

1. จงหา $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

....

....

....2. จงหา $\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx$

....

....

....**เฉลย**

1. จงหา $\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}}$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{4x^2-9}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(2x)}{(\frac{2x}{2})\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \int \frac{d(2x)}{(2x)\sqrt{(2x)^2-3^2}}$$

ให้ $u = 2x$ และ $a = 3$

จากสูตร $\int \frac{du}{u\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\operatorname{arcsec}\frac{u}{a} + C$

$\therefore \int \frac{d(2x)}{(2x)\sqrt{(2x)^2-3^2}} = \frac{1}{3}\operatorname{arcsec}\frac{2x}{3} + C$

2. จงหา $\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx$

$$\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx = \int \sqrt{(x^2-2x+1)+4}\,dx$$
$$= \int \sqrt{(x-1)^2+2^2}\,d(x-1)$$

ให้ $u = x-1$ $\therefore du = d(x-1)$ และ $a = 2$

จากสูตร $\int \sqrt{u^2+a^2}\,du = \frac{1}{2}u\sqrt{u^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|u+\sqrt{u^2+a^2}\right| + C$

$\therefore \int \sqrt{(x-1)^2+2^2}\,d(x-1) = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{(x-1)^2+2^2} + \frac{2^2}{2}\ln\left|(x-1)+\sqrt{(x-1)^2+2^2}\right| + C$

ดังนั้น $\int \sqrt{x^2-2x+5}\,dx = \frac{1}{2}(x-1)\sqrt{x^2-2x+5} + 2\ln\left|(x-1)+\sqrt{x^2-2x+5}\right| + C$