แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 3

รหัสวิชา 3000-1406 **วิชา** แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 1 **ชั่วโมงที่** 7-9 **ชื่อหน่วย** ลิมิตและความต่อเนื่องของฟังก์ชัน (ต่อ)

แนวคิด

เมื่อ x มีค่าเข้าใกล้ค่าอนันต์ (∞) นั่นคือ x เข้าใกล้ $+\infty$ หรือ $-\infty$ ซึ่งจะพบว่าลิมิตของฟังก์ชันบางฟังก์ชันก็หาค่าได้ บางฟังก์ชันก็หาค่าไม่ได้ ขอให้พิจารณาฟังก์ชันต่อไปนี้ประกอบ

ถ้า $f(x) = \frac{1}{x}$ เราจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$ หรือ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$ แต่ถ้า $f(x) = x$ เราจะได้ว่า $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ $\therefore$ $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ ไม่ว่า n จะเป็นจำนวนคู่หรือคี่ก็ตาม แต่ถ้าหาค่าของ

$$\lim_{x\to-\infty} x^n = \begin{cases} -\infty; n\,\text{เป็นจำนวนค} \\ +\infty; n\,\text{เป็นจำนวนค} \end{cases}$$

ในกรณีที่เราหาค่าของลิมิตฟังก์ชันที่ค่าอนันต์ได้ คำตอบเป็น $+\infty$ หรือ $-\infty$ เราจะถือว่าลิมิตหาค่าไม่ได้

หลักสำคัญอีกอย่างหนึ่ง คือ สำหรับลิมิตของฟังก์ชันพหุนาม ขณะที่ค่าของ $x \longrightarrow +\infty$ หรือ $x \longrightarrow -\infty$ จะมีค่าเท่ากับลิมิตของเทอมที่มีดีกรีสูงสุดของฟังก์ชันพหุนาม นั่นคือ

$$\lim_{x\to+\infty} (c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1x + c_0) = \lim_{x\to+\infty} c_nx^n$$

หรือ

$$\lim_{x\to-\infty} (c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} + \ldots + c_1x + c_0) = \lim_{x\to-\infty} c_nx^n$$

สาระการเรียนรู้

1. ลิมิตของฟังก์ชันที่ค่าอนันต์
2. ลิมิตของฟังก์ชันตรรกยะ
3. การหาลิมิตของฟังก์ชันที่อยู่ในรูปแบบของ $\frac{0}{0}$
4. ความต่อเนื่องของฟังก์ชัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. หาค่าลิมิตฟังก์ชันได้
2. บอกความหมายและหาค่าต่อเนื่องของฟังก์ชันได้
3. มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูกตเวที

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. อาจารย์สนทนาโดยการ ถาม – ตอบ เรื่องการแทนค่าในฟังก์ชัน

ขั้นสอน

2. อาจารย์อธิบายตัวอย่างที่หลากหลายในหนังสือ โดยการถาม – ตอบ

ตัวอย่าง จงหาค่าของ $\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{x^2-4}$

วิธีทำ $$\lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{x^2-4} = \frac{\lim_{x\to 2}(3x-1)}{\lim_{x\to 2}x^2-4} = \frac{3(2)-1}{2^2-4} = \frac{5}{0}$$

$$\therefore \lim_{x\to 2}\frac{3x-1}{x^2-4} = \infty$$ (ไม่มีลิมิต)

3. อาจารย์ให้นักศึกษาทำเอกสารแนะแนวทาง เสร็จแล้วเปลี่ยนกันตรวจพร้อมทั้งเฉลยบนกระดานเพื่อซักถามข้อสงสัย
4. อาจารย์ให้นักศึกษาทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 1.1 และ 1.2

ขั้นสรุปและการประยุกต์

1. อาจารย์และนักศึกษาช่วยเฉลยเอกสารแนะแนวทาง และแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 1.1, 1.2
2. อาจารย์ตรวจดูแบบประเมินผลการเรียนรู้ และชี้แจงสิ่งที่บกพร่องหรือผิดพลาดให้นักศึกษาทราบ
3. อาจารย์และนักศึกษาร่วมกันสรุปบทเรียนและเปิดโอกาสซักถามตามหัวข้อที่กล่าวมา

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารแนะแนวทาง และใบงาน
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 1.1 และ 1.2

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. ตรวจเอกสารแนะแนวทาง
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 1.1 และ1.2
3. การสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
4. การสังเกตและประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. ใบงาน การหาค่าของฟังก์ชัน
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 1.1 และ 1.2
3. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
4. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. ใบงาน การหาค่าของฟังก์ชัน เกณฑ์ผ่าน 70 %
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 1.1 และ 1.2 เกณฑ์ผ่าน 70 %
3. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
4. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

เอกสารแนะแนวทาง

จงเติมข้อความลงในช่องว่างให้สมบูรณ์

จงพิจารณาว่า f(x) = $\frac{x^2-4}{x^3-8}$ ในช่วงต่อไปนี้ ช่วงใดบ้างที่ f(x) ไม่ต่อเนื่อง

1. (-∞, -2)

....

....

2. (+2, +∞)

....

....

3. (-2, 2)

....

....

เฉลยเอกสารแนะแนวทาง

(1) (-∞, -2) **ในช่วงนี้ x ต่อเนื่องทุกค่าของ x**

$$\textbf{ที่ } f(-2) = \frac{(-2)^2-4}{(-2)^3-8} = \frac{0}{-16} = 0$$

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \lim_{x\to-2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} = \frac{0}{4} = 0$$

(2) (+2, +∞)

ในช่วงนี้ x ต่อเนื่องทุกค่าของ x

∴ เราพิจารณาค่า x ที่มากกว่า +2 ขึ้นไป f(x) จึงต่อเนื่องตลอดช่วงนี้

(3) (-2, 2) ในช่วงนี้ ตั้งแต่ [-2, 2) ฟังก์ชันต่อเนื่องตลอด ยกเว้นที่ x = 2

∴ ไม่สามารถหาค่าของฟังก์ชัน f(x) ได้ f(2) = $\frac{0}{0}$ **ไม่นิยาม**

แผนการจัดการเรียนรู้ที่ 4

รหัสวิชา 3000-1406 **วิชา** แคลคูลัสพื้นฐาน

หน่วยที่ 2 **ชั่วโมงที่** 10-12 **ชื่อหน่วย** อนุพันธ์ของฟังก์ชัน

แนวคิด

อนุพันธ์ของฟังก์ชัน เป็นการศึกษาถึงการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเมื่อตัวแปรในฟังก์ชันมีการเปลี่ยนแปลงทีละน้อย เริ่มจากศึกษาการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรก่อน ผลการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรทำให้ฟังก์ชันมีการเปลี่ยนแปลง อัตราส่วนการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรเราเรียกว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ย คือ $\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ และเมื่อเราพูดถึงกรณีที่ Δx มีค่าเข้าใกล้ 0 เราจะเรียกอัตราการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรนี้ว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงชั่วขณะของฟังก์ชัน หรืออนุพันธ์ของฟังก์ชัน นั่นคือ $\frac{df}{dx} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$

สาระการเรียนรู้

1. การเปลี่ยนแปลงของตัวแปร
2. การเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชัน
3. อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปร
4. นิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน

ผลการเรียนรู้ที่คาดหวัง

1. บอกการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรและของฟังก์ชันได้
2. คำนวณหาค่าการเปลี่ยนแปลงของฟังก์ชันได้
3. คำนวณหาค่าอัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของฟังก์ชันเทียบกับตัวแปรได้
4. บอกนิยามของการหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันได้
5. คำนวณหาค่าอนุพันธ์ของฟังก์ชันโดยการใช้นิยามได้
6. มีการพัฒนาคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ที่อาจารย์สามารถสังเกตเห็นได้ ในด้านความมีมนุษยสัมพันธ์ ความมีวินัย ความรับผิดชอบ ความเชื่อมั่นในตนเอง ความสนใจใฝ่รู้ ความรักสามัคคี ความกตัญญูกตเวที

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นนำเข้าสู่บทเรียน

1. อาจารย์และนักศึกษาช่วยกันทบทวนเรื่องลิมิตของฟังก์ชัน และการแทนค่าของสมการ

ขั้นสอน

2. แจกใบความรู้ให้นักศึกษาศึกษาค้นคว้า นิยาม ตัวอย่าง และข้อสังเกต เรื่องอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
3. อาจารย์และนักศึกษาช่วยกันตีความหมายและตีความของนิยาม และข้อสังเกต พร้อมทั้งอธิบายซักถามในตัวอย่างที่มีให้ในใบความรู้
4. ยกตัวอย่างบนกระดานและส่งตัวแทนออกไปทำ ถ้าผิดพลาดตรงจุดไหนให้นักศึกษาที่อยู่ข้างในออกไปช่วยเพื่อนได้

5. ทำแบบประเมินผลการเรียนรู้ที่ 2.1

ขั้นสรุปและการประยุกต์

6. ให้นักศึกษาไปศึกษาเพิ่มเติมเนื้อหาในเรื่อง อนุพันธ์ของฟังชัน
7. ให้นักศึกษาสรุปนิยามของอนุพันธ์ของฟังก์ชัน
8. นักศึกษาทำแบบประผลการเรียนรู้ที่ 2.2

สื่อการเรียนการสอน

1. ใบความรู้

การวัดผลและการประเมินผล

วิธีวัดผล

1. สังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. ตรวจแบบประเมินผลการเรียนรู้ หน่วยที่ 2
3. การสังเกตและประเมินผลพฤติกรรมด้านคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์

เครื่องมือวัดผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ หน่วยที่ 2
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ โดยอาจารย์และนักศึกษาร่วมกันประเมิน

เกณฑ์การประเมินผล

1. แบบสังเกตพฤติกรรมการปฏิบัติงานรายบุคคล เกณฑ์ผ่าน ต้องไม่มีช่องปรับปรุง
2. แบบประเมินผลการเรียนรู้ หน่วยที่ 2 เกณฑ์ผ่าน ทำถูกต้อง 70% ขึ้นไป
3. แบบประเมินคุณธรรม จริยธรรม ค่านิยม และคุณลักษณะอันพึงประสงค์ คะแนนขึ้นอยู่กับการประเมินตามสภาพจริง

ใบความรู้

นิยาม

กำหนดให้ y = f(x) เป็นฟังก์ชันใด ๆ อัตราการเปลี่ยนแปลงเฉลี่ยของ y เทียบกับการเปลี่ยนแปลงของ x เขียนแทนด้วย

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

หรือเรียกว่า อัตราการเปลี่ยนแปลงในช่วง x ถึง $x+\Delta x$ ก็ได้

ตัวอย่าง 1. กำหนดให้ $y = 2x^2 + 3$ จงหา $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เมื่อ x = 3 และ Δx = 0.1

วิธีทำ จาก $y = 2x^2 + 3$ .... (1)

เมื่อ x มีค่าเปลี่ยนแปลงไปเป็น $x+\Delta x$ ค่าของ y จะเปลี่ยนแปลงไปเป็น $y+\Delta y$ ดังนั้นจะได้ว่า

$$y+\Delta y = 2(x+\Delta x)^2+3$$

$$= 2(x^2+2x\Delta x+(\Delta x)^2)+3$$

$$\therefore \quad y+\Delta y = 2x^2+4x\Delta x+2(\Delta x)^2+3 \quad \text{................ (2)}$$

$$(2)-(1) \qquad \Delta y = 4x\Delta x+2(\Delta x)^2 \quad \text{................ (3)}$$

$$(3) \div \Delta x \qquad \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{4x\Delta x+2(\Delta x)^2}{\Delta x}$$

$$\therefore \quad \frac{\Delta y}{\Delta x} = 4x+2\Delta x$$

แทนค่า x = 3, Δx = 0.1 ลงใน $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ เราจะได้ว่า

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4(3) + 2(0.1)$$

$$= 12 + 0.2$$

ดังนั้น $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ = 12.2 **ตอบ**

นิยาม

กำหนดให้ y = f(x) เป็นฟังก์ชันใด ๆ อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x คือ

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

เมื่อ ***ลิมิตตามนิยามนี้*** หาค่าได้

ข้อสังเกต

ถ้า $\frac{dy}{dx}$ หาค่าได้ เราจะกล่าวว่า y มีอนุพันธ์ที่ x ถ้า $\frac{dy}{dx}$ หาค่าไม่ได้ เราจะกล่าวว่า y ไม่มีอนุพันธ์ที่ x ซึ่งการจะหาค่า $\frac{dy}{dx}$ ได้หรือไม่นั้น ขึ้นอยู่กับค่าของ $\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ นั่นเอง

สัญลักษณ์ที่ใช้เกี่ยวกับอนุพันธ์มีดังนี้

$\frac{dy}{dx}$ อ่านว่า ดีวายบายดีเอกซ์ หมายถึง อนุพันธ์ของ y เทียบกับ x

$\frac{dz}{dx}$ อ่านว่า ดีแซดบายดีเอกซ์ หมายถึง อนุพันธ์ของ z เทียบกับ x

$\frac{dQ}{dt}$ อ่านว่า ดีคิวบายดีที หมายถึง อนุพันธ์ของ Q เทียบกับ t

ตัวอย่าง 2. กำหนดให้ $y = x^2 + x - 5$ จงหาอนุพันธ์ของ y เทียบกับ x โดยใช้นิยาม

วิธีทำ จาก $y = x^2 + x - 5$

จากนิยาม
$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + (x+\Delta x) - 5 - (x^2 + x - 5)}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2 + x + \Delta x - 5 - x^2 - x + 5}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + \Delta x^2 + \Delta x}{\Delta x}$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(2x + \Delta x + 1)}{\Delta x} = 2x + 1$$
$$\therefore \frac{dy}{dx} = 2x + 1$$