	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ 2
	ชื่อวิชา กลศาสตร์วิศวกรรม 1.	**สอนครั้งที่** 5
	ชื่อหน่วย โมเมนต์	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

หัวเรื่อง

3.1 โมเมนต์ของแรง

3.2 โมเมนต์แรงสองมิติ

3.3 โมเมนต์แรงสามมิติ

สาระสำคัญ

1. โมเมนต์ของแรง เป็น ค่าของผลคูณระหว่างแรงกับระยะทางจากจุดหมุนจนถึงแนวแรงในแนวตั้งฉาก โดยที่ระยะทางจากจุดหมุนถึงแนวแรง

2. โมเมนต์สองมิติคือแรงที่กระทำรอบจุดหมุนทิศทางของโมเมนต์ตั้งฉากกับระนาบของวัตถุที่ขนานกับแรงโดยเป็นไปตามกฎมือขวา

3. โมเมนต์สามมิติคือ ขนาดของแรง กระทำกับระยะตั้งฉากระหว่างแกนหมุนถึงแนวแรง เขียนเป็นสมการดังนี้ $Mo = Fd$

สมรรถนะที่พึงประสงค์ (ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณ วิชาชีพ)

1. ผู้เรียนสามารถคำนวณหาโมเมนต์ของระบบแรงได้อย่างถูกต้อง
2. ผู้เรียนสามารถคำนวณหาโมเมนต์สองมิติของแรงได้อย่างถูกต้อง
3. ผู้เรียนสามารถคำนวณหาโมเมนต์สามมิติของแรงได้อย่างถูกต้อง

เนื้อหาสาระ

3.1 โมเมนต์ของแรง

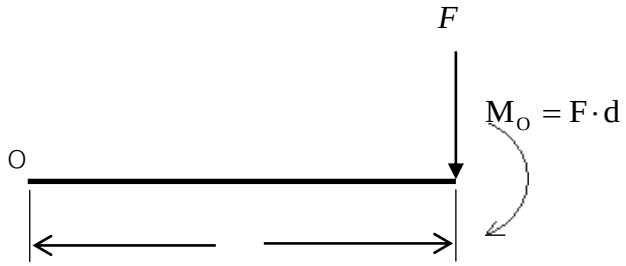
โมเมนต์ของแรง หมายถึง ค่าของผลคูณระหว่างแรงกับระยะทางจากจุดหมุนจนถึงแนวแรงในแนวตั้งฉาก โดยที่ระยะทางจากจุดหมุนถึงแนวแรง เรียกว่า แขนของโมเมนต์ (Moment Arm) หรืออาจจะเรียกอีกอย่างหนึ่งได้ว่า โมเมนต์ของแรง คือ ความพยายามหรือแนวโน้มของแรงที่จะหมุนวัตถุรอบจุดใดจุดหนึ่ง หรือแกนใดแกนหนึ่ง

$$M_O = F \cdot d$$

เมื่อ M_O = โมเมนต์ของแรงรอบจุด O, $(N \cdot m)$

F = แรง, (N)

d = แขนของโมเมนต์, (m)

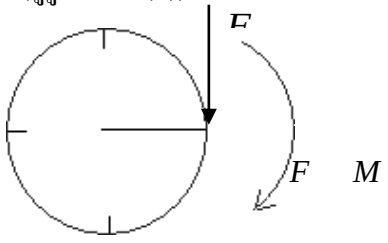


รูปที่ 1.

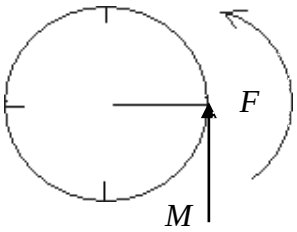
โมเมนต์ของแรงสามารถแบ่งได้เป็น 2 ชนิด ตามลักษณะการเดินทางรอบจุดหมุนดังต่อไปนี้

1.โมเมนต์ตามเข็มนาฬิกา (Clock Wise Moment) คือโมเมนต์ที่เกิดจากแรงซึ่งเดินทางรอบจุดหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกา คูณกับระยะทางจากจุดหมุนถึงแนวแรง โดยสามารถสมมติเครื่องหมายบวก (+) หรือลบ (-) ได้ตามความเหมาะสม และต้องสอดคล้องกับโมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกาด้วย (ดูรูป 2.14 (ก))

2. โมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกา (Anti – Clock Wise Moment) คือโมเมนต์ที่เกิดจากแรง ซึ่งเดินทางรอบจุดหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา คูณกับระยะทางจากจุดหมุนจนถึงแนวแรงโดยสามารถสมมติเครื่องหมายบวก (+) หรือลบ (-) ได้ตามความเหมาะสม และต้องสอดคล้องกับโมเมนต์ตามเข็มนาฬิกาด้วยเช่นกัน (ดูรูป 2.11 (ข))



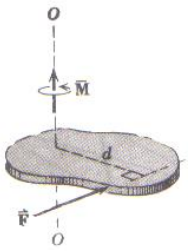
(1) โมเมนต์ตามเข็มนาฬิกา



(2) โมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกา

<u>3.2 โมเมนต์ (ระบบ 2 มิติ)</u>

โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ ที่กระทำกับวัตถุรอบแกน O - O (ดูรูป 2.12)



รูปที่ 3 $\therefore\ M = F \cdot d$

โดยที่ M คือ ขนาดของโมเมนต์

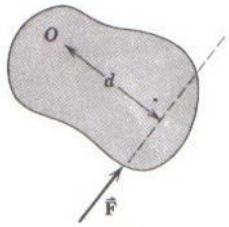
F คือ ขนาดของแรง $\vec{F}$

d คือ ระยะตั้งฉากระหว่างแกนหมุนถึงแนวแรง

ทิศทางของโมเมนต์ตั้งฉากกับระนาบของวัตถุที่ขนานกับแรงโดยเป็นไปตามกฎมือขวา (ดูรูป 4)

รูปที่ 4

โดยทั่วไปมักจะกล่าวกันว่าโมเมนต์รอบจุดใดๆ แต่ความจริงแล้วเป็นโมเมนต์รอบแกนที่ผ่านจุดนั้น(ดูรูป 2.14) จะได้ว่า $M_O = F \cdot d$



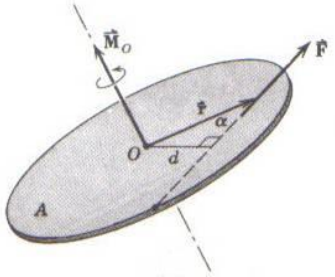
รูปที่ 5

หลักการของโมเมนต์ หรือรู้จักกันในนามทฤษฎีของวาริยอง โดยกล่าวไว้ว่า “โมเมนต์ของแรงใดรอบจุด ๆ หนึ่งจะมีค่าเท่ากับผลรวมของโมเมนต์ของแรงย่อยทั้งหลายรอบแกนหมุนเดียวกัน

3.3 โมเมนต์ (ระบบ 3 มิติ)

ถ้าดูรูปที่ 6 แล้ว แรง $\vec{F}$ อยู่บนระนาบ A และจุด O ก็อยู่บนระนาบ A ด้วย ดังนั้น โมเมนต์ของแรง $\vec{F}$ รอบแกนที่ผ่านจุด O และตั้งฉากกับระนาบ A มีขนาด $M_O = Fd$ หรือเขียนให้อยู่ในรูปของเวคเตอร์ได้

โมเมนต์รอบจุด O คือ $Mo = Fd$



รูปที่ 6

หรือเขียนในรูปของเวคเตอร์ได้ว่า $M_O = \vec{r} \times \vec{F}$

และเนื่องจาก $\vec{r} = \vec{i}r_x + \vec{j}r_y + \vec{k}r_z$

$$\vec{F} = \vec{i}F_x + \vec{j}F_y + \vec{k}F_z$$

ดังนั้นสามารถเขียน Mo ในเทอมของดีเทอร์-มิแนนต์ได้เป็น

$$M_O = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ r_x & r_y & \vec{k} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

$$= \left(r_y F_z - r_z F_y\right)\vec{i} - \left(r_x F_z - r_z F_x\right)\vec{j} + \left(r_x F_y - r_y F_x\right)\vec{k}$$

$$= M_x \vec{i} + M_y \vec{j} + M_Z \vec{k}$$

ในที่นี้ $M_x = r_y F_z - r_z F_y$

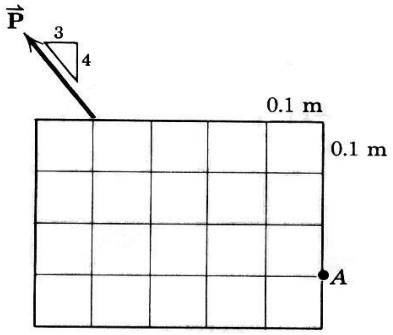
$$M_y = r_z F_x - r_x F_z$$

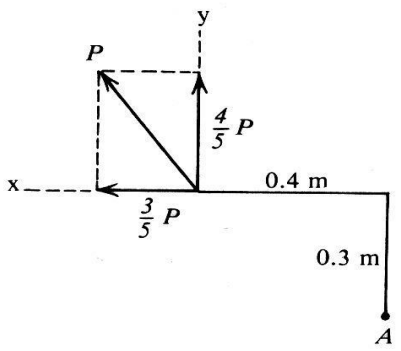
$$M_z = r_x F_z - r_z F_x$$

เมื่อ r_x, r_y และ r_z คือองค์ประกอบของตำแหน่งในแนวแกน x , y และ z ของเวคเตอร์ระบุตำแหน่งที่ลากจากจุด O ไปยังจุดที่แรงกระทำอยู่บนแนว

เส้นการกระทำของแรง F_x, F_y และ F_z คือองค์ประกอบ x ,y และ z ของเวคเตอร์ของแรง

<u>ตัวอย่างที่</u> 1. โมเมนต์ของแรง $\vec{P}$ รอบจุด A เท่ากับ $30\ N\cdot m$ จงคำนวณหาขนาดของ $\vec{P}$





แตกแรง P ไปแนวแกน x ได้ $\frac{3}{5}P$

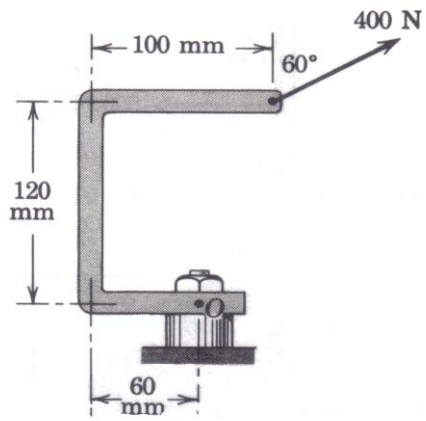
แตกแรง P ไปแนวแกน y ได้ $\frac{4}{5}P$

$\therefore$ โมเมนต์ของแรง P รอบจุด $A = 30\ N\cdot m$

$\therefore \frac{4}{5}P(0.4) - \frac{3}{5}P(0.3) = 30$

$P = 214\ N$ <u>Ans</u>

<u>ตัวอย่างที่</u> 2. จงคำนวณหาโมเมนต์ของแรง 400 N รอบจุด O



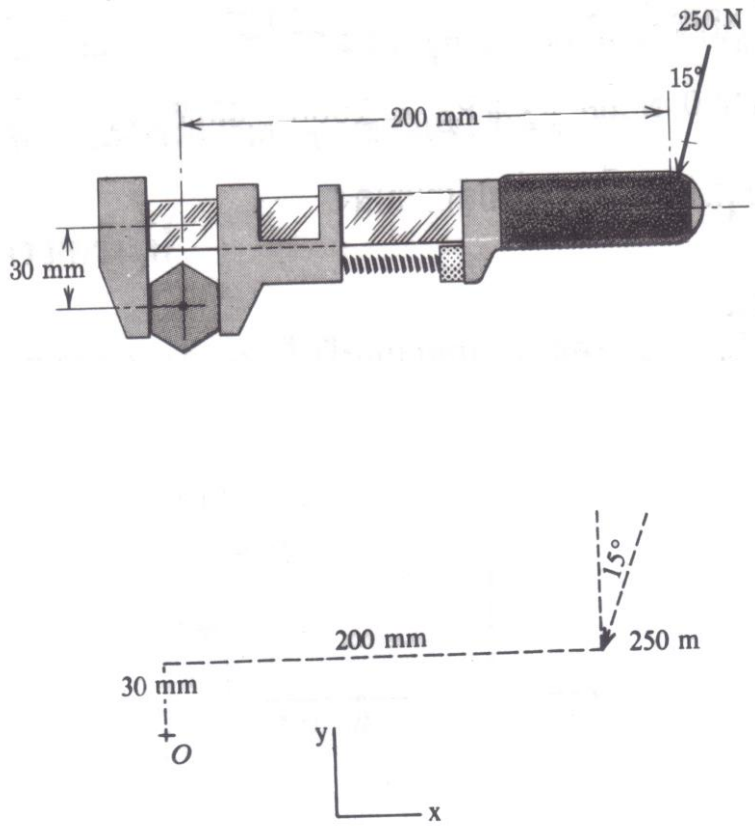
<u>วิธีทำ</u> แตกแรง 400 N ไปในแนวระดับและแนวดิ่ง จากนั้นคำนวณหาค่าของโมเมนต์ของแรงจุด O โดยกำหนดให้โมเมนต์ตามเข็มนาฬิกาเป็นบวก

$$M_O = 400\sin 60^\circ (0.12) - 400\cos 60^\circ (0.1 - 0.06)$$

$$= 41.6 - 8$$

$$= 33.6 \text{ N}\cdot\text{m}$$ ตามเข็มนาฬิกา <u>Ans</u>

<u>ตัวอย่างที่</u> 3. จงคำนวณหาโมเมนต์ของแรง 250 N (ที่กระทำบนด้ามประแจ) รอบจุดศูนย์กลางของหัวสลักเกลียว



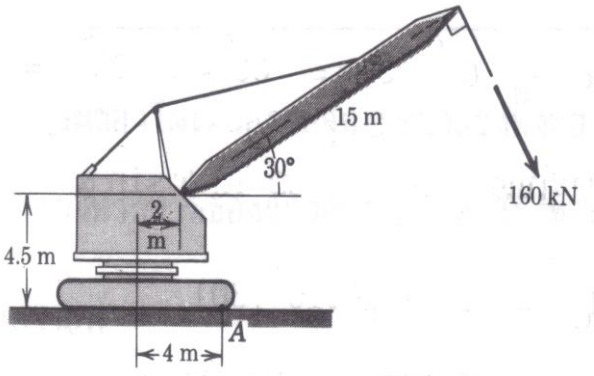
<u>วิธีทำ</u> แตกแรง 250 N ไปในแนวระดับและแนวดิ่ง จากนั้นคำนวณหาค่าของโมเมนต์รอบจุดศูนย์กลางของหัวสลักเกลียว โดยการกำหนดให้โมเมนต์ตามเข็มนาฬิกาบวก

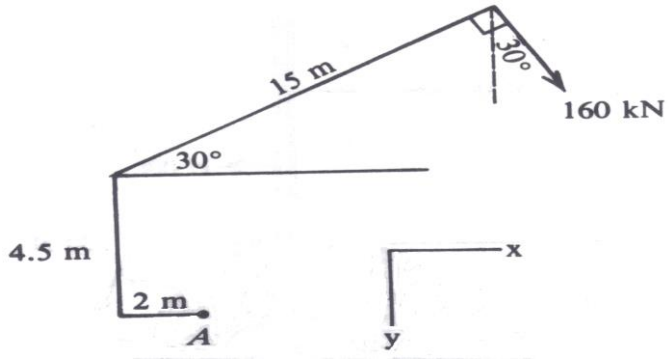
$$M_O = 250\cos 15^\circ (0.2) - 250\sin 15^\circ (0.03)$$

$$= 48.30 - 1.94$$

$$= 46.4 \ N \cdot m$$ ตามเข็มนาฬิกา <u>Ans</u>

<u>ตัวอย่างที่</u> 4. จงคำนวณหาโมเมนต์เนื่องจากแรง 160 kN รอบจุด A ตามรูป





<u>วิธีทำ</u> แตกแรง 160 kN ไปในแนวแกน X และ Y แล้วหาโมเมนต์รอบจุด A

$$\begin{aligned} M_A &= 160\sin 30^\circ\left(15\sin 30^\circ + 4.5\right) \\ &\quad + \ 160\cos 30^\circ\left(15\cos 30^\circ - 2\right) \\ &= 80(12) \ + \ 138.56(10.99) \\ &= 2482.82 \ \text{kN}\cdot\text{m} \end{aligned}$$

ตามเข็มนาฬิกา <u>Ans</u>

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู

ทดสอบ

1. ให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบเรื่องระบบแรงสองมิติระบบแรงสามมิติ เวกเตอร์ระบุตำแหน่ง (30 นาที)
2. ผู้สอนเฉลยแบบทดสอบ (10 นาที)

ขั้นนำ

1. ครูพูดถึงเนื้อหาเรื่อง โมเมนต์ของแรงโมเมนต์แรงสองมิติ โมเมนต์แรงสามมิติ (10 นาที)

ขั้นสอน

1. สอนแบบบรรยายในหน่วยที่ 3 (ในหัวข้อย่อย 1 , 2 , 3) (70 นาที)
2. สอนสาธิตหลักการคำนวณตัวอย่างที่ 1 , 2 , 3 (20 นาที)
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดและเปิดโอกาสให้ผู้เรียนถาม (25 นาที)
4. เฉลยแบบฝึกหัด (10 นาที)

ขั้นสรุป

1. สรุปเนื้อให้ผู้เรียนฟัง (10 นาที)

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

1. ให้ศึกษาเอกสารประกอบการเรียนตามหัวข้อ 1 , 2 , 3 และทำรายงานส่ง
2. ให้ทำแบบฝึกหัด
3. ให้ไปศึกษาเรื่องที่จะเรียนสัปดาห์หน้า

สื่อการเรียนการสอน

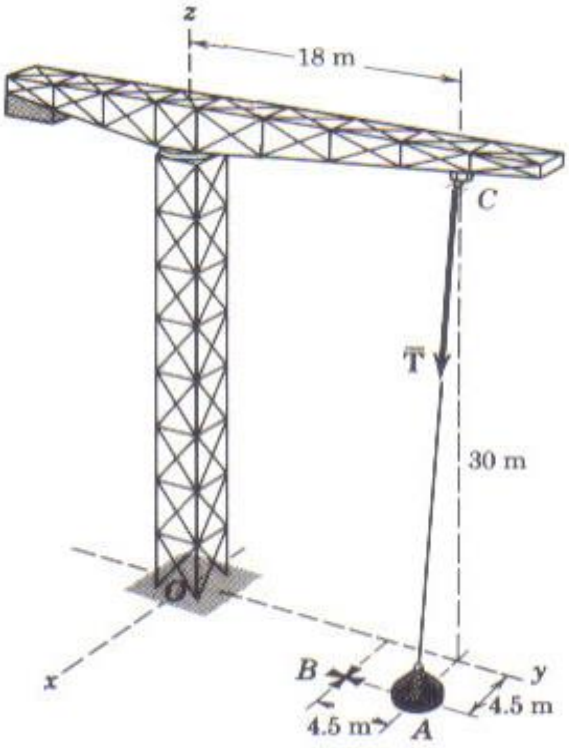
1. เอกสารประกอบการสอนหัวข้อย่อย 1, 2 , 3
2. แผ่นใสหัวข้อย่อย 1, 2 , 3

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตความสนใจผู้เรียน
2. ความรับผิดชอบต่องานที่มอบหมาย
3. การให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมระหว่างเรียน
4. ทำแบบทดสอบ

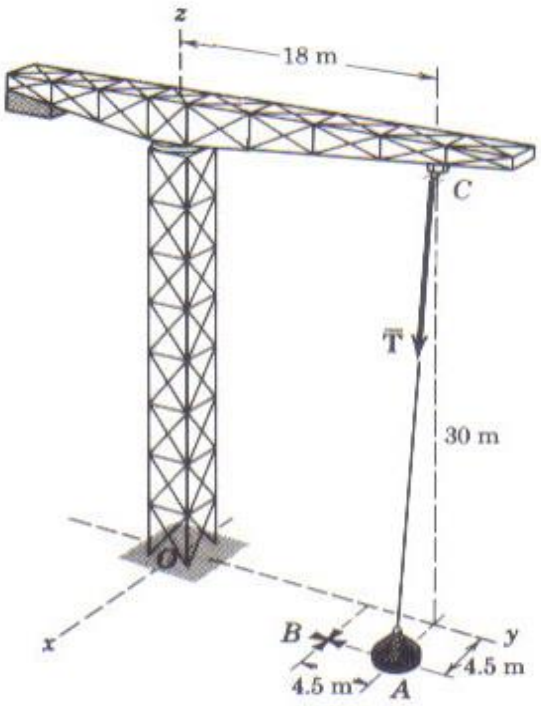
แบบฝึกหัด

1. สายเคเบิลมีแรงตึง $\bar{T}$ ขนาด 21 kN จงคำนวณหาโมเมนต์เนื่องจากแรงตึง $\bar{T}$ รอบฐาน O ของปั้นจั่น



เฉลยแบบฝึกหัด

1. สายเคเบิลมีแรงตึง $\vec{T}$ ขนาด 21 kN จงคำนวณหาโมเมนต์เนื่องจากแรงตึง $\vec{T}$ รอบฐาน O ของปั้นจั่น



<u>วิธีทำ</u> หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนว CA เพื่อหาแรงตึง $\vec{T}$ ในรูปเวคเตอร์ หาเวคเตอร์ $\vec{r}$ จากจุด O ถึงแนวแรง แล้วใช้วิธี Cross Product ระหว่าง $\vec{r}$ กับ $\vec{T}$

$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \overline{OA}-\overline{OC}\\ &= \left(4.5\vec{i}+18\vec{j}\right)-\left(18\vec{j}+30\vec{k}\right)\\ &= 4.5\vec{i}-30\vec{k}\\ \left|\overline{CA}\right| &= \sqrt{4.5^2+(-30)^2}\\ &= 30.34\ \text{m}\end{aligned}$$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u} = \dfrac{\overline{CA}}{\left|\overline{CA}\right|} = \dfrac{1}{30.34}\left(4.5\vec{i}-30\vec{k}\right)$

$$\vec{T} = T(\vec{u}) = \frac{21}{30.34}\left(4.5\vec{i}-30\vec{k}\right)$$

$$\vec{r} = \overline{OA} = 4.5\vec{i}+18\vec{j}$$

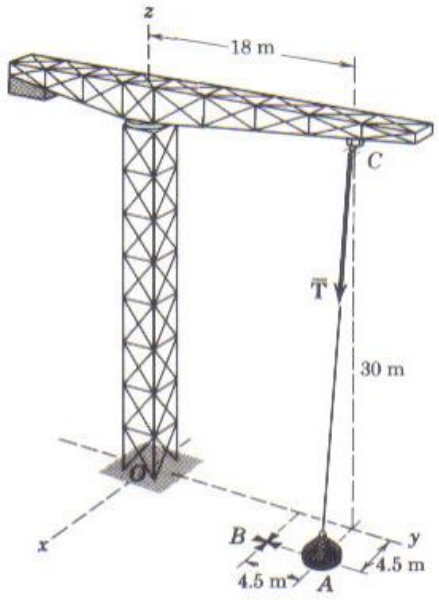
$$\begin{aligned}M_O &= \vec{r}\times\vec{T}\\ &= \left(4.5\vec{i}+18\vec{j}\right)\times\frac{21}{30.34}\left(4.5\vec{i}-30\vec{k}\right)\end{aligned}$$

$$= \frac{21}{30.34}\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4.5 & 18 & 0 \\ 4.5 & 0 & -30 \end{vmatrix}$$

$$M_O = -374\vec{i} + 93.5\vec{j} - 56.1\vec{k} \quad kN \cdot m \qquad \underline{ANS}$$

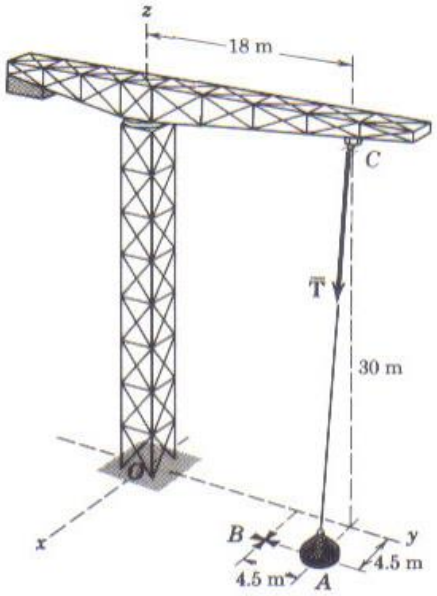
แบบทดสอบสัปดาห์ที่ 5

1. สายเคเบิลมีแรงตึง $\bar{T}$ ขนาด 21 kN จงคำนวณหาโมเมนต์เนื่องจากแรงตึง $\bar{T}$ รอบฐาน O ของปั้นจั่น



เฉลยแบบทดสอบสัปดาห์ที่ 5

1. สายเคเบิลมีแรงตึง $\vec{T}$ ขนาด 21 kN จงคำนวณหาโมเมนต์เนื่องจากแรงตึง $\vec{T}$ รอบฐาน O ของ



<u>วิธีทำ</u> หาเวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนว CA เพื่อหาแรงตึง $\vec{T}$ ในรูปเวคเตอร์ หาเวคเตอร์ $\vec{r}$ จากจุด O ถึงแนวแรง แล้วใช้วิธี Cross Product ระหว่าง $\vec{r}$ กับ $\vec{T}$

$$\begin{aligned}\overline{CA} &= \overline{OA}-\overline{OC}\\ &= \left(4.5\vec{i}+18\vec{j}\right)-\left(18\vec{j}+30\vec{k}\right)\\ &= 4.5\vec{i}-30\vec{k}\\ \left|\overline{CA}\right| &= \sqrt{4.5^2+(-30)^2}\\ &= 30.34\ \text{m}\end{aligned}$$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วย $\vec{u} = \dfrac{\overline{CA}}{\left|\overline{CA}\right|} = \dfrac{1}{30.34}\left(4.5\vec{i}-30\vec{k}\right)$

$$\vec{T} = T(\vec{u}) = \frac{21}{30.34}\left(4.5\vec{i}-30\vec{k}\right)$$

$$\vec{r} = \overline{OA} = 4.5\vec{i}+18\vec{j}$$

$$\begin{aligned}M_O &= \vec{r}\times\vec{T}\\ &= \left(4.5\vec{i}+18\vec{j}\right)\times\frac{21}{30.34}\left(4.5\vec{i}-30\vec{k}\right)\\ &= \frac{21}{30.34}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4.5 & 18 & 0\\ 4.5 & 0 & -30\end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$M_O = -374\vec{i}+93.5\vec{j}-56.1\vec{k} \quad \text{kN}\cdot\text{m} \qquad \underline{\text{ANS}}$$

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการเรียนของนักเรียน.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการสอนของครู.....

.....

.....

.....

.....

.....