	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ 2
	ชื่อวิชา กลศาสตร์วิศวกรรม 1.	**สอนครั้งที่** 6
	ชื่อหน่วย โมเมนต์ (ต่อ)	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

หัวเรื่อง

3.4 แรงคู่ควบระบบสองมิติ

3.5 การย้ายแรงบนวัตถุเกร็ง

3.6 แรงคู่ควบระบบสามมิติ

สาระสำคัญ

1. แรงคู่ควบระบบสองมิติคือโมเมนต์ที่เกิดจากแรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางตรงข้ามกัน แต่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

2. แรงคู่ควบระบบสามมิติเป็นแรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกัน โมเมนต์ที่เกิดจากแรงทั้งสองรอบจุดหมุนเขียนเป็นสมการได้ดังนี้

$$\vec{M} = (\vec{r}_A \times \vec{F}) + (\vec{r}_B \times -\vec{F})$$
$$= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times F$$

3. การย้ายแรงบนวัตถุเกร็งเป็นการย้ายตำแหน่งของแรงกระทำจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งโดยที่แรงมีขนาดและทิศทางคงเดิม จะต้องเพิ่มแรงคู่ควบ M เข้าไปด้วย

สมรรถนะที่พึงประสงค์ (ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณ วิชาชีพ)

1. ผู้เรียนสามารถหาแรงคู่ควบระบบสองมิติได้อย่างถูกต้อง
2. ผู้เรียนสามารถหาแรงคู่ควบระบบสามมิติได้อย่างถูกต้อง
3. ผู้เรียนสามารถย้ายแรงบนวัตถุเกร็งได้อย่างถูกต้อง

เนื้อหาสาระ

3.4 แรงคู่ควบ (ระบบ 2 มิติ)

โมเมนต์ที่เกิดจากแรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากัน และมีทิศทางตรงข้ามกัน แต่ไม่ได้อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน เรียกว่า “แรงคู่ควบ”

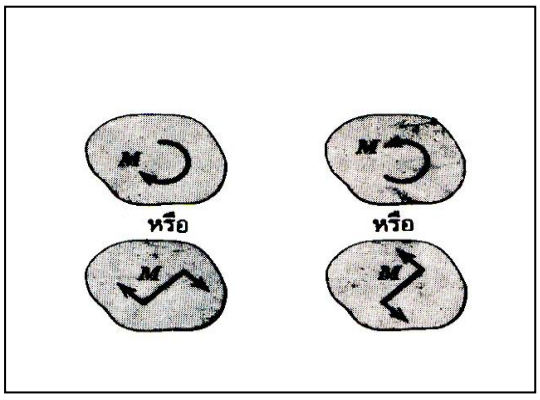
รูปที่ 2.16 (ก) แสดงแรงสองแรงมีขนาดเท่ากันและมีทิศทางตรงข้ามกันคือ $\vec{F}$ และ $-\vec{F}$ และอยู่ห่างกัน d โมเมนต์ของแรงทั้งสองรอบแกนใดๆที่ตั้งฉากกับระนาบ (เช่นแกนที่ผ่านจุด O) คือแรงคู่ควบ $\vec{M}$ และมีขนาดดังนี้

$$M = F(a+d) - Fa$$

$$M = Fd$$

แรงคู่ควบ $\vec{M}$ เป็นเวคเตอร์อิสระ ตามรูปที่ 2.16 (ข) ทิศทางของ $\vec{M}$ ตั้งฉากกับระนาบของแรงทั้งสองโดยใช้กฎมือขวาแรงคู่ควบอาจจะแสดงได้ด้วยสัญลักษณ์ตามรูปที่ 2.16 (ค) ซึ่งอาจมีทิศทางทวนเข็มหรือตามเข็มก็ได้

(ก)　　(ข)

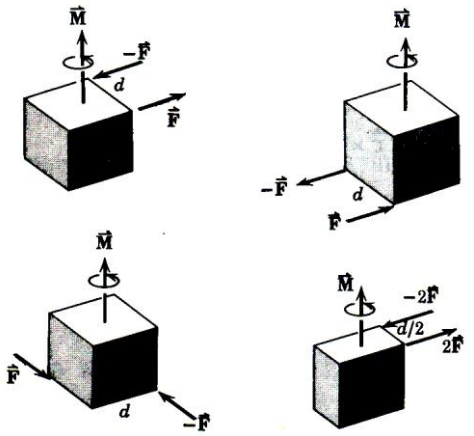


ตามเข็มนาฬิกา　　ทวนเข็มนาฬิกา

(ค)

รูปที่ 1

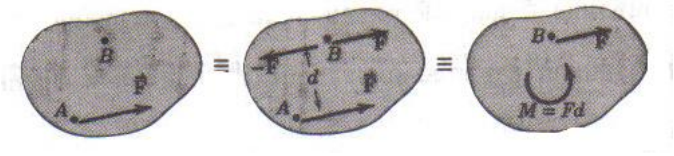
ขนาดของแรงคู่ควบจะไม่เปลี่ยนแปลงถ้าผลคูณระหว่าง F และ d คงที่ รูปที่ 2 แสดงสัญลักษณ์ต่างๆที่ให้ขนาดของแรงคู่ควบเท่ากัน



รูปที่ 2

3.5 การย้ายแรงบนวัตถุเกร็ง

การย้ายตำแหน่งของแรงกระทำจากจุดหนึ่งไปยังอีกจุดหนึ่งโดยที่แรงมีขนาดและทิศทางคงเดิม จะต้องเพิ่มแรงคู่ควบ M เข้าไปด้วย เช่น ตามรูปที่ 3 ย้ายแรง F จากจุด A ไปยังจุด B จะต้องเพิ่มแรงคู่ควบ M เข้าไปซึ่งมีค่าเท่ากับ Fd

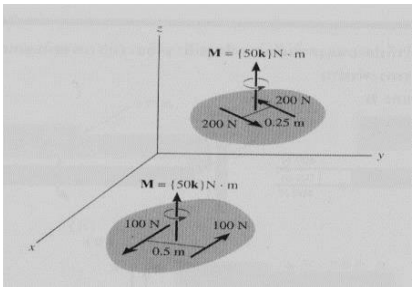


รูปที่ 3

แรงคู่ควบเทียบเท่า

แรงคู่ควบที่เทียบเท่ากันเมื่อระบบของแรงคู่ควบนั้นให้ค่าโมเมนต์ที่เท่ากันและทิศทางเดียวกัน เนื่องจากโมเมนต์คู่ควบเกิดจากแรงแรงคู่ควบซึ่งจะ ตั้งฉากกับระนาบที่บรรจุแรงคู่ควบ ดังนั้นแรงคู่ควบที่เทียบเท่ากันต้องอยู่ในระนาบเดียวกันหรืออยู่ในในระนาบที่ขนานกัน ทิศทางของโมเมนต์ของแรงคู่ควบที่เทียบเท่ากัน นั่นคือ ตั้งฉากกับระนาบซึ่งขนานกันตัวอย่างเช่น แรงคู่ควบสองแรงในรูปที่ 2.19 ที่มีค่าเทียบเท่ากัน แรงคู่ควบแรกเกิดจากแรง 100N ที่ห่างกันด้วยระยะ d = 0.5 m และอีกแรงคู่ควบเกิดจากคู่ของแรง 200N ที่ห่างกันด้วยระยะ d = 0.25 m

เนื่องจากระนาบที่แรงกระทำขนานกันกับระนาบ x – y โมเมนต์ที่เกิดจากแต่ละแรงคู่ควบจึงหมุนรอบแกน k คือ M = 50 kN.m

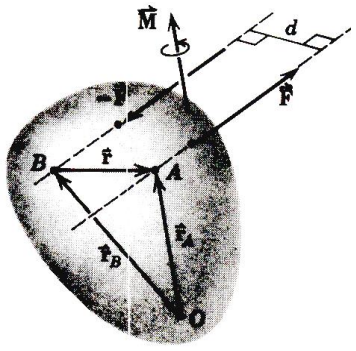


รูปที่ 4

3.6 แรงคู่ควบ (ระบบ 3 มิติ)

แรงสองแรงที่มีขนาดเท่ากันแต่มีทิศทางตรงข้ามกันคือ แรง $\vec{F}$ และ $-\vec{F}$ ตามรูปที่ 2.20 แรงทั้งสองผ่านจุด A และ B ตามลำดับ $\vec{r}_A$ และ $\vec{r}_B$ เป็นเวคเตอร์ตำแหน่งของจุด A และ B ตามลำดับ โมเมนต์ที่เกิดจากแรงทั้งสองรอบจุด *O* คือ

$$\vec{M} = (\vec{r}_A \times \vec{F}) + (\vec{r}_B \times -\vec{F})$$
$$= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times F$$



รูปที่ 5

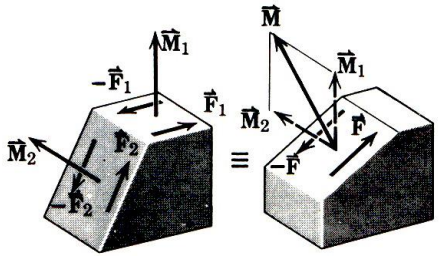
เนื่องจาก $\vec{r}_A - \vec{r}_B = \vec{r}$ จึงทำให้การเทียบกับศูนย์กลางโมเมนต์ *O* ไม่มีความหมาย ดังนั้นได้แรงคู่ควบ

$$\vec{M} = (\vec{r}_A \times \vec{F}) + (\vec{r}_B \times -\vec{F})$$
$$= (\vec{r}_A - \vec{r}_B) \times F$$

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$$

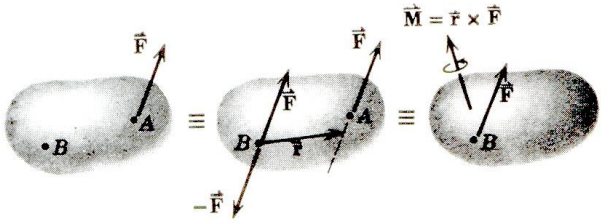
ขนาดของแรงคู่ควบคือ $M = Fd$

แรงคู่ควบเป็นเวคเตอร์อิสระและสามารถรวมกันได้ตามกฎการรวมเวคเตอร์ เช่นตาม รูป 6 แสดงการรวมเวคเตอร์ของแรงคู่ควบ $\bar{M}_1$ และ $\bar{M}_2$ ได้ $\bar{M}$



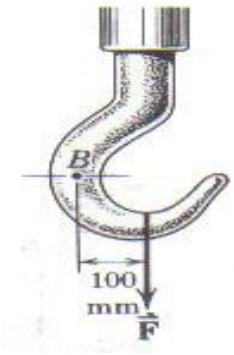
รูปที่ 6

รูปที่ 7 แสดงการย้ายแรง $\bar{F}$ จากจุด A ไปที่จุด B จะต้องเพิ่มแรงคู่ควบ $\bar{M}$ ซึ่งมีค่าเท่ากับ $\vec{r} \times \vec{F}$



รูปที่ 7

<u>ตัวอย่างที่</u> 1. ในการออกแบบตะขอตามรูป เพื่อรับแรงดึง $\bar{F}$ พบว่าจุด B ต้องรับแรงดึง $\bar{F}$ และแรงคู่ควบ ถ้าแรงคู่ควบมีขนาด $400\ \text{N}\cdot\text{m}$ จงหาขนาดของแรง $\bar{F}$



<u>วิธีทำ</u> ใช้สูตรแรงคู่ควบคำนวณหาขนาดของแรง $\bar{F}$

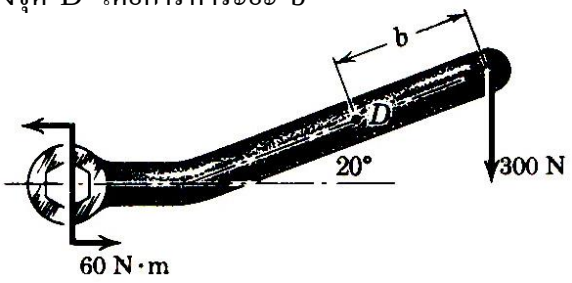
แรงคู่ควบ $M = Fd$

$$400 = F(0.1)$$

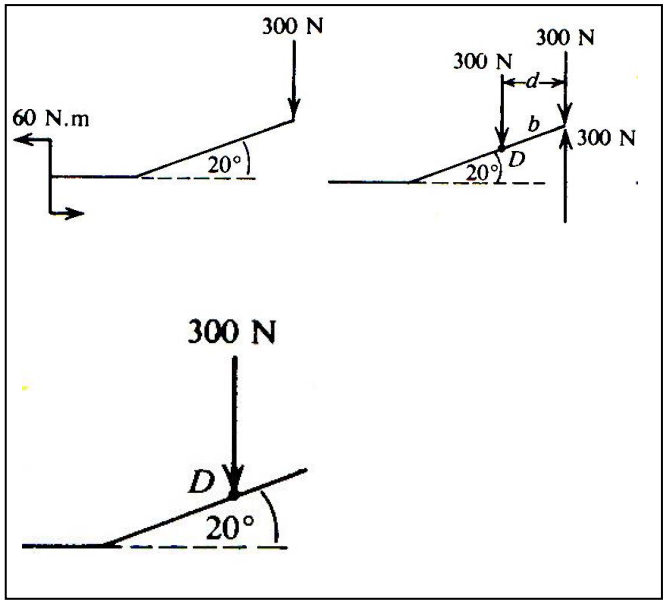
$$F = 40000 \quad \text{N}$$

$$= 40 \quad \text{kN} \qquad \underline{\text{Ans}}$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 2. แทนแรงคู่ควบและแรงตามรูปด้วยแรงเพียงแรงเดียว คือแรง $\bar{F}$ ที่จุด D จงหาตำแหน่งของจุด D โดยการหาระยะ b



<u>วิธีทำ</u> เพิ่มแรงคู่ควบของแรง 300 N เข้าไป โดยให้มีขนาดเท่ากับแรงคู่ควบ 60 N·m และให้แรงแรงหนึ่งผ่านจุด D เขียน F.B.D. ได้ดังนี้



แรงคู่ควบ $300\ N = 60\ N \cdot m$

หาระยะทาง (d) $300 \times d = 60$

$$d = \frac{60}{300}$$

$$= 0.2\ m$$

$$= 200\ mm$$

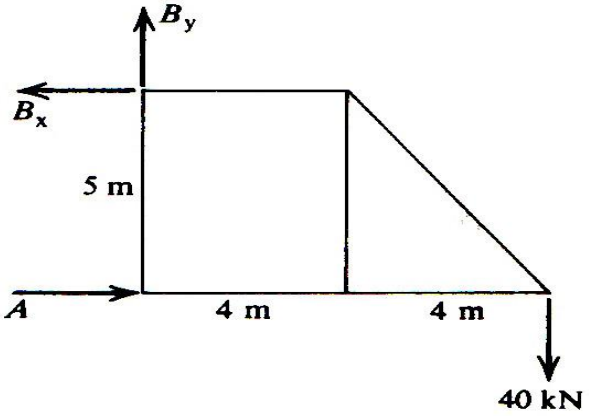
$$\text{Cos}\,20^\circ = \frac{200}{\text{b}}$$

$$\text{b} = \frac{200}{\cos 20^\circ} = 213\ \text{mm} \qquad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

<u>ตัวอย่างที่</u> 3.

โครงสร้างรับน้ำหนัก 40 kN ถ้าแรง40 kNและแรงย่อยในแนวดิ่ง ที่จุด B ประกอบกันเป็นแรงคู่ควบซึ่งเท่ากับและตรงกันข้ามกับแรงคู่ควบที่เกิดจากแรงระดับสองแรง จงคำนวณหาขนาดของแรงลัพธ์ที่จุด B

<u>วิธีทำ</u> เขียน F.B.D. ได้ดังนี้



เนื่องจากแรงคู่ควบปรกอบด้วยแรงสองแรงที่มีทิศทางตรงกันข้ามและมีขนาดเท่ากัน ดังนั้นจึงหาขนาดของแรงที่ไม่ทราบค่าได้ และหาแรงลัพธ์ที่จุด B ได้

จากรูปจะได้ $B_y = 40$ kN

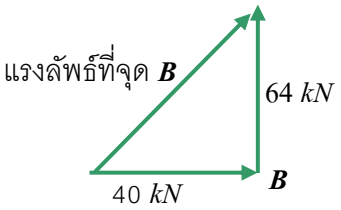
และ $A = B_x$

แรงคู่ควบทั้งสองมีขนาดเท่ากัน ดังนั้น

$$40(4+4) = 5B_x$$

$$B_x = 64 \text{ kN}$$

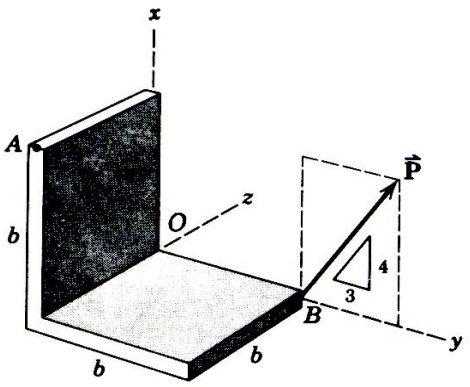
เพราะฉะนั้น หา B ได้จากกฎสามเหลี่ยมมุมฉาก

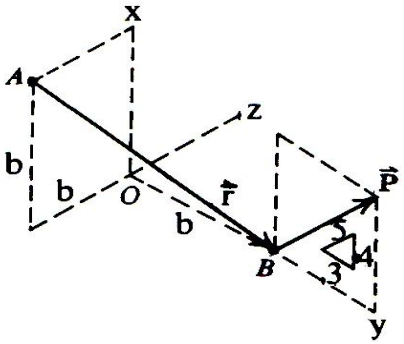


จะได้ $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{64^2 + 40^2}$

$= 75.5$ kN <u>Ans</u>

ตัวอย่างที่4. จงหาโมเมนต์ของแรง $\vec{P}$ รอบจุด A





วิธีทำ

หาเวคเตอร์ $\vec{r}$ ของการขจัดจากจุด A ถึงจุด B

จะได้

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$
$$= b\vec{j} - (b\vec{i} - b\vec{k})$$
$$= b(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

เวคเตอร์หนึ่งหน่วยในแนวแกน $\vec{P}$ คือ

$$\vec{u} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$$

$$\therefore \vec{P} = P(\vec{u}) = \frac{P}{5}(4\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$\vec{M}_A = \vec{r} \times \vec{P}$$

$$= b(-\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \times \frac{P}{5}(4\vec{i} + 3\vec{j})$$

$$= \frac{Pb}{5}(-3\vec{i} + 4\vec{j} - 7\vec{k}) \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู

ทดสอบ

1. ให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบเรื่องโมเมนต์ของแรง โมเมนต์แรงสองมิติ โมเมนต์แรงสามมิติ (30 นาที)
2. ผู้สอนเฉลยแบบทดสอบ (10 นาที)

ขั้นนำ

1. กล่าวนำเข้าสู่บทเรียนโดยพูดคุยถึงเรื่องแรงคู่ควบระบบสองมิติ แรงคู่ควบระบบสามมิติ การย้ายแรงบนวัตถุเกร็ง (10 นาที)

ขั้นสอน

1. สอนแบบบรรยายในหน่วยที่ 3 (ในหัวข้อย่อย 1 , 2 , 3) (70 นาที)
2. สอนสาธิตหลักการคำนวณตัวอย่างที่ 1 , 2 , 3 (20 นาที)
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดและเปิดโอกาสให้ผู้เรียนถาม (25 นาที)
4. เฉลยแบบฝึกหัด (10 นาที)

ขั้นสรุป

1. สรุปเนื้อให้ผู้เรียนฟัง (10 นาที)

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

1. ให้ศึกษาเอกสารประกอบการเรียนตามหัวข้อ 1 , 2 , 3 และทำรายงานส่ง
2. ให้ทำแบบฝึกหัด
3. ให้ไปศึกษาเรื่องที่จะเรียนสัปดาห์หน้า

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนเนื้อหาข้อย่อย 1 ,2 ,3
2. แผ่นใสเนื้อหาข้อย่อย 1 ,2 ,3

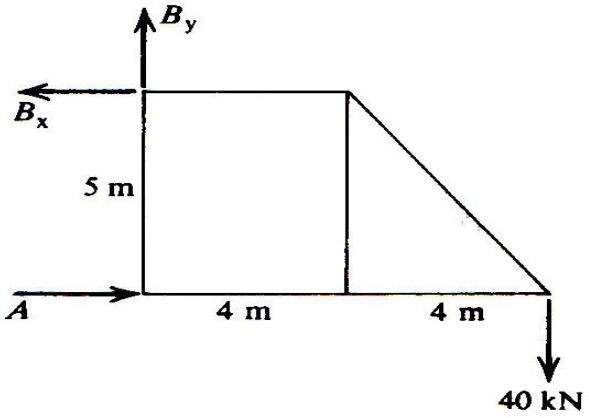
การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตความสนใจผู้เรียน
2. ความรับผิดชอบต่องานที่มอบหมาย
3. การให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมระหว่างเรียน
4. ทำแบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

1. โครงสร้างรับน้ำหนัก 40 kN ถ้าแรง40 kNและแรงย่อยในแนวดิ่ง ที่จุด B ประกอบกันเป็นแรงคู่ควบซึ่งเท่ากับและตรงกันข้ามกับแรงคู่ควบที่เกิดจากแรงระดับสองแรง จงคำนวณหาขนาดของแรงลัพธ์ที่จุด B

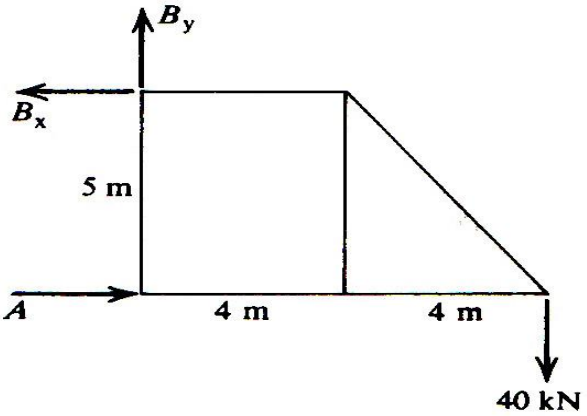
<u>วิธีทำ</u> เขียน F.B.D. ได้ดังนี้



เฉลยแบบฝึกหัด

1. โครงสร้างรับน้ำหนัก 40 kN ถ้าแรง40 kNและแรงย่อยในแนวดิ่ง ที่จุด B ประกอบกันเป็นแรงคู่ควบซึ่งเท่ากับและตรงกันข้ามกับแรงคู่ควบที่เกิดจากแรงระดับสองแรง จงคำนวณหาขนาดของแรงลัพธ์ที่จุด B

<u>วิธีทำ</u> เขียน F.B.D. ได้ดังนี้



เนื่องจากแรงคู่ควบปรกอบด้วยแรงสองแรงที่มีทิศทางตรงกันข้ามและมีขนาดเท่ากัน ดังนั้นจึงหาขนาดของแรงที่ไม่ทราบค่าได้ และหาแรงลัพธ์ที่จุด B ได้

จากรูปจะได้ $B_y = 40$ kN

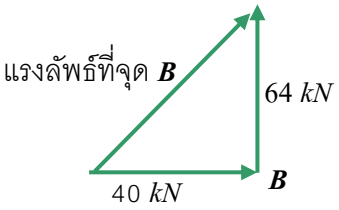
และ $A = B_x$

แรงคู่ควบทั้งสองมีขนาดเท่ากัน ดังนั้น

$$40(4+4) = 5B_x$$

$$B_x = 64 \text{ kN}$$

เพราะฉะนั้น หา B ได้จากกฎสามเหลี่ยมมุมฉาก



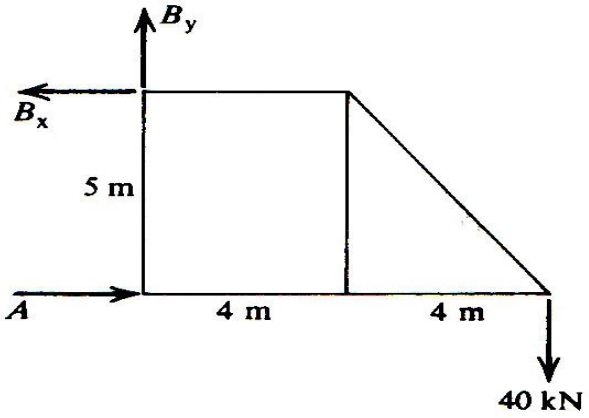
จะได้ $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{64^2 + 40^2}$

$= 75.5$ kN <u>Ans</u>

แบบทดสอบสัปดาห์ที่ 6

1. โครงสร้างรับน้ำหนัก 40 kN ถ้าแรง40 kNและแรงย่อยในแนวดิ่ง ที่จุด B ประกอบกันเป็นแรงคู่ควบซึ่งเท่ากับและตรงกันข้ามกับแรงคู่ควบที่เกิดจากแรงระดับสองแรง จงคำนวณหาขนาดของแรงลัพธ์ที่จุด B

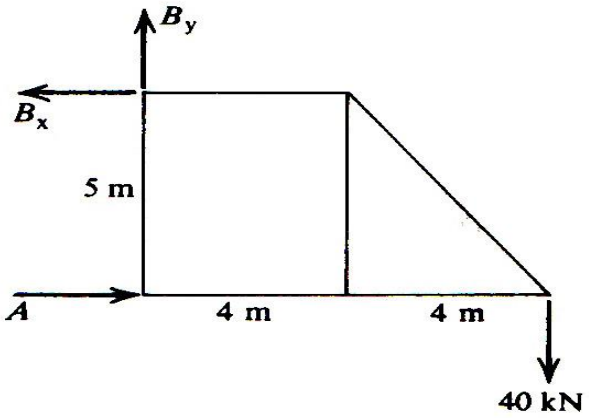
<u>วิธีทำ</u> เขียน F.B.D. ได้ดังนี้



เฉลยแบบทดสอบสัปดาห์ที่ 6

1. โครงสร้างรับน้ำหนัก 40 kN ถ้าแรง40 kNและแรงย่อยในแนวดิ่ง ที่จุด B ประกอบกันเป็นแรงคู่ควบซึ่งเท่ากับและตรงกันข้ามกับแรงคู่ควบที่เกิดจากแรงระดับสองแรง จงคำนวณหาขนาดของแรงลัพธ์ที่จุด B

<u>วิธีทำ</u> เขียน F.B.D. ได้ดังนี้



เนื่องจากแรงคู่ควบปรกอบด้วยแรงสองแรงที่มีทิศทางตรงกันข้ามและมีขนาดเท่ากัน ดังนั้นจึงหาขนาดของแรงที่ไม่ทราบค่าได้ และหาแรงลัพธ์ที่จุด B ได้

จากรูปจะได้ $B_y = 40$ kN

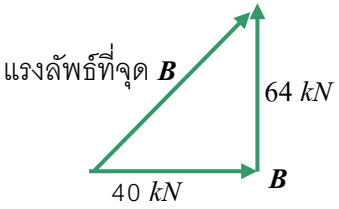
และ $A = B_x$

แรงคู่ควบทั้งสองมีขนาดเท่ากัน ดังนั้น

$$40(4+4) = 5B_x$$

$$B_x = 64 \text{ kN}$$

เพราะฉะนั้น หา B ได้จากกฎสามเหลี่ยมมุมฉาก



จะได้ $B = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} = \sqrt{64^2 + 40^2}$

$= 75.5$ kN <u>Ans</u>

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการเรียนของนักเรียน.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการสอนของครู.....

.....

.....

.....

.....

.....