	แผนการจัดการเรียนรู้	หน่วยที่ 3
	ชื่อวิชา กลศาสตร์วิศวกรรม	สอนครั้งที่ 7
	ชื่อหน่วย สมดุลของวัตถุ	จำนวน 3 ชั่วโมง
<p>หัวข้อเรื่อง</p> <p>4.1 สมดุลระบบ 2 มิติ</p> <p>4.2 เงื่อนไขสมดุล ระบบ 2 มิติ</p> <p>สาระสำคัญ</p> <p>1. สมดุลระบบ 2 มิติเป็นการวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการสมดุลของระบบซึ่งประกอบด้วยวัตถุชิ้นเดียว หรือหลายชิ้นรวมกัน จำเป็นต้องแยกวัตถุที่พิจารณาออกจากวัตถุชิ้นอื่นๆ แล้วนำมาเขียนผังอิสระของวัตถุ (Free Body Diagram (F.B.D.))</p> <p>2. เงื่อนไขสมดุล ระบบ 2 มิติวัตถุจะอยู่ในสภาวะสมดุลก็ต่อเมื่อแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำกับวัตถุเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นสมการสมดุลได้ดังนี้</p> $\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_o = 0$ <p>สมรรถนะที่พึงประสงค์ (ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณ วิชาชีพ)</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. ผู้เรียนสามารถวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการสมดุลของระบบซึ่งอาจจะประกอบด้วยวัตถุชิ้นเดียว หรือหลายชิ้นรวมกันได้อย่างถูกต้อง 2. ผู้เรียนสามารถบอกเงื่อนไขต่างๆในการวิเคราะห์การสมดุลสองมิติได้อย่างถูกต้อง 3. ผู้เรียนสามารถใช้สมการการสมดุลเพื่อแก้ไขโจทย์ปัญหาได้อย่างถูกต้อง 		

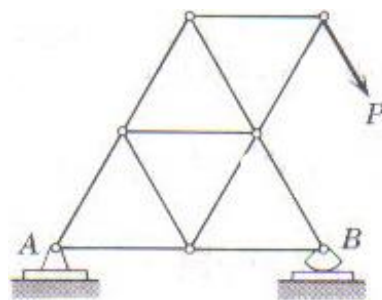
เนื้อหาสาระ

4.1 สมดุลระบบ 2 มิติ

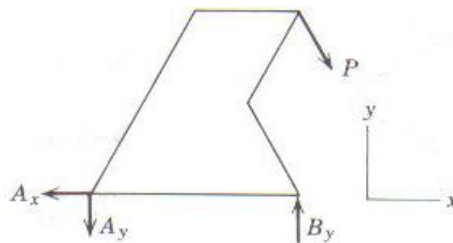
การวิเคราะห์ปัญหาเกี่ยวกับการสมดุลของระบบซึ่งอาจจะประกอบด้วยวัตถุชิ้นเดียว หรือหลายชิ้นรวมกัน จำเป็นต้องแยกวัตถุที่พิจารณาออกจากวัตถุชิ้นอื่นๆ แล้วนำมาเขียนผังอิสระของวัตถุ (Free Body Diagram (F.B.D.))

การเขียนผังอิสระต้องเขียนให้ถูกต้องตามลักษณะต่างๆของแรงและวัตถุ ดังที่ได้กล่าวมาแล้วในสัปดาห์ที่แล้ว ตัวอย่างของผังอิสระของวัตถุในระบบ 2 มิติ สามารถแสดงในรูปต่อไปนี้

1. **โครงถัก** ไม่คิดน้ำหนักของโครงถักเมื่อเทียบกับแรง P ซึ่งมีค่ามาก

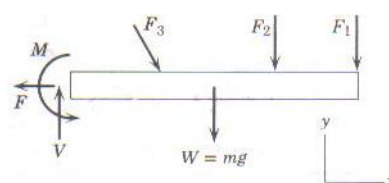


ระบบทางกลศาสตร์

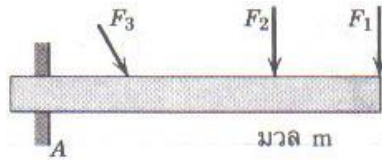


แผนภาพวัตถุอิสระของ(F.B.D.)

2. **คานฝังแน่น**

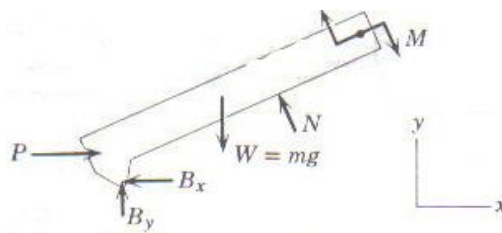


ระบบทางกลศาสตร์

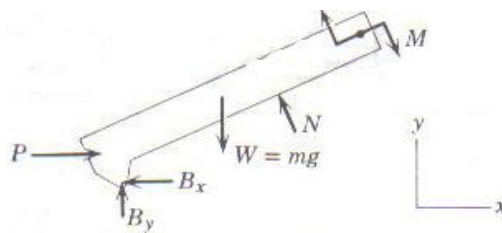


แผนภาพวัตถุอิสระของ(F.B.D.)

3. คาน ฝิวส์มผัสเรียบที่จุด A มวล m

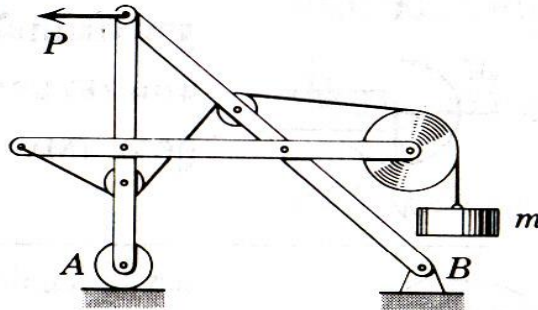


ระบบทางกลศาสตร์

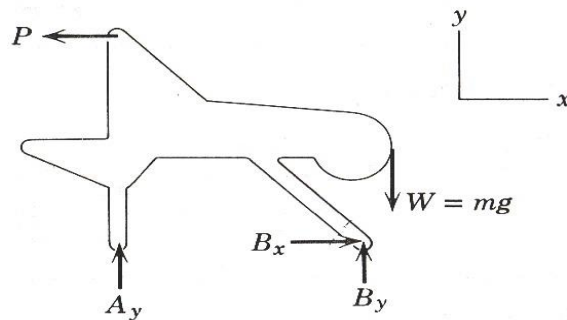


แผนภาพวัตถุอิสระของ(F.B.D.)

4. ระบบวัตถุเกร็งหลายชิ้นต่อกันแต่พิจารณาเป็นชิ้นเดียวกัน ไม่คิดน้ำหนักของกลไก



ระบบทางกลศาสตร์



แผนภาพวัตถุอิสระของ(F.B.D.)

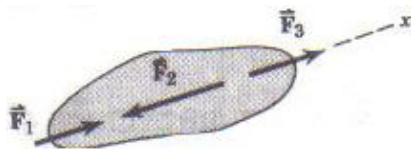
4.2 เงื่อนไขสมดุล (ระบบ 2 มิติ)

วัตถุจะอยู่ในสมดุลก็ต่อเมื่อแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำกับวัตถุเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นการสมดุลในรูปสเกลาร์ได้ดังนี้ (จุด O เป็นจุดใดๆ บนวัตถุหรือนอกวัตถุ)

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O = 0$$

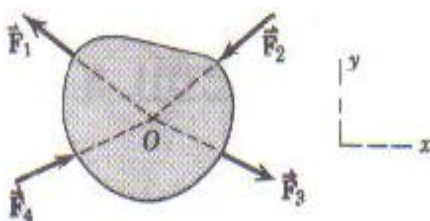
การสมดุลแบบต่างๆ ในระบบ 3 มิติ ซึ่งได้แก่ ระบบแรงที่อยู่ในเส้นตรงเดียวกัน แรงที่ตัดกันที่จุดหนึ่ง แรงขนานกัน และกรณีทั่วไป สามารถแสดงได้ดังรูปข้างล่างต่อไปนี้

1. แรงที่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน ภายใต้สภาวะสมดุลจะใช้สมการสมดุลของแรงหนึ่งสมการในแนวแกนเดียวกันนั้น



สมการสมดุล คือ $\sum F_x = 0$

2. แรงตัดกันที่จุดเดียวกัน ภายใต้สภาวะการสมดุลบนระนาบ $x-y$ จะใช้สมการสมดุลของแรงสองสมการก็เพียงพอแล้ว เนื่องจากโมเมนต์รอบแกนซึ่งผ่านจุดพบกันของแรงเหล่านั้นมีค่าเป็นศูนย์



สมการสมดุล คือ

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

3. แรงขนานกัน ภายใต้สภาวะการสมดุลบนระนาบ $x-y$ ใช้สมการสมดุลของแรงในทิศทางของแรงขนานหนึ่งสมการ และสมการสมดุลโมเมนต์รอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบของแรงอีกหนึ่งสมการ

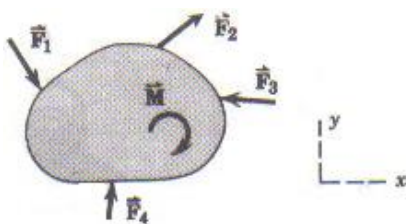


สมการการสมดุล คือ

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

4. กรณีทั่วไป ภายใต้สภาวะสมดุลบนระนาบ $x-y$ ใช้สมการสมดุลของแรงสองสมการ และสมการสมดุลของโมเมนต์ของแรงสองโมเมนต์รอบแกนซึ่งตั้งฉากกับระนาบของแรงอีกหนึ่ง สมการ



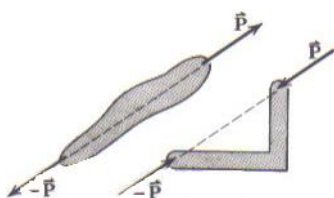
สมการการสมดุล คือ

$$\sum F_x = 0$$

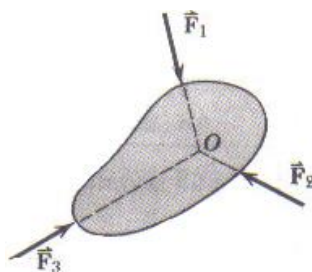
$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M_o = 0$$

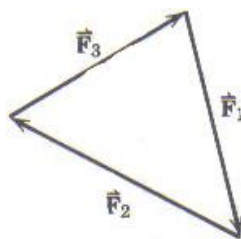
สภาพสมดุล 2 ลักษณะที่มักพบบ่อยๆ ซึ่งต้องระมัดระวังเป็นพิเศษคือ สมดุลภายใต้แรงที่กระทำสองแรง ซึ่งเรียกว่า ชิ้นส่วนรับสองแรง (Two-force member) ตามรูปที่ 3.7 แรงทั้งสองต้องมีขนาดเท่ากัน ทิศทางตรงข้ามกัน และอยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันโดยไม่คำนึงถึงรูปร่างของชิ้นส่วนเหล่านั้น ตามรูปถือว่า น้ำหนักของชิ้นส่วนน้อยมากเมื่อเทียบกับขนาดของแรง



สภาพสมดุลลักษณะที่ 2 คือ ชิ้นส่วนรับ 3 แรง (Three-force member) ตามรูปที่ 3.8 แรงทั้งสามต้องพบกันที่จุดจุดหนึ่ง และถ้าเขียนในรูปสามเหลี่ยมแทนแรงจะได้รูปปิดพอดี



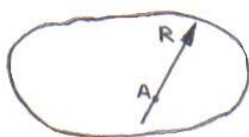
(ก)



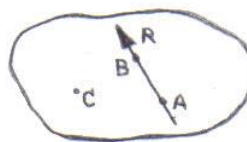
(ข)

สมการสมดุลลักษณะอื่นที่ควรทราบ

มีวิธีเพิ่มเติมอยู่อีก 2 วิธี สำหรับกรณีทั่วไปของสภาวะสมดุลของแรง ใน 2 มิติ คือ



(ก)



(ข)

1. จากรูปที่ 2 (ก) ถ้า $\sum M_A = 0$ แรงลัพธ์ R จะต้องผ่านจุด A และจะต้องไม่เป็นแรงคู่ควบ ดังนั้นในรูปที่ 3.9 (ข) ถ้า $\sum M_A = 0$ และ $\sum F_x = 0$ แรงลัพธ์ R จะต้องผ่านจุด A และต้องตั้งฉากกับแกน x เมื่อกำหนดให้ B เป็นจุดใดๆ ที่แนว AB ไม่ตั้งฉากกับแนวแกน x จะได้ว่า $\sum M_B = 0$ ก็ต่อเมื่อ R ต้องมีค่าเป็นศูนย์และวัตถุจะอยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้นสมการสมดุลที่สามารถใช้ได้คือ

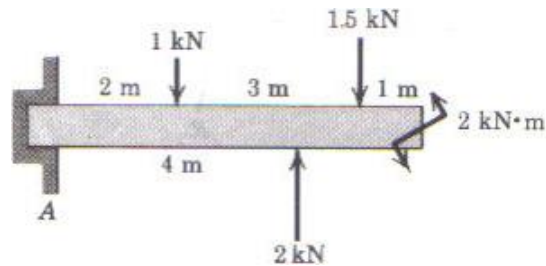
$$\sum F_x = 0 ; \sum M_A = 0 ; \sum M_B = 0$$

เมื่อ จุด A และ B ต้องไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกันที่ตั้งฉากกับแนวแกน X

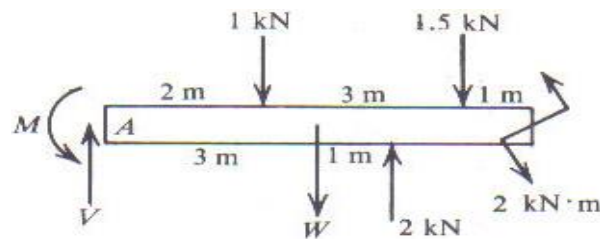
2. จากรูปที่ 2 (ค) ถ้า $\sum M_A = 0$ แรงลัพธ์ R จะต้องผ่านจุด A ดังนั้นในรูปที่ 3.9 (ง) ถ้า $\sum M_B = 0$ ด้วยแรงลัพธ์จะต้องผ่านจุด B เมื่อ C เป็นจุดใดๆ ที่ไม่อยู่บนแนวเส้นตรง AB จะได้ว่า $\sum M_C = 0$ ก็ต่อเมื่อแรงลัพธ์ R จะต้องมีค่าเป็นศูนย์และวัตถุจะอยู่ในสภาวะสมดุล ดังนั้นสมการสมดุลใช้ได้คือ

$\sum M_A = 0 ; \sum M_B = 0 ; \sum M_C = 0$ เมื่อจุด A, B และ C ต้องไม่อยู่ในแนวเส้นตรงเดียวกัน

ตัวอย่าง 1. คานสม่ำเสมอมีมวล 50 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร ปลายข้างหนึ่งของคานฝังแน่นอยู่ในกำแพง คานถูกกระทำด้วยแรงและแรงคู่ควบดังรูป จงเขียนผังอิสระของคาน โดยแยกโดยแยกคานออกมาตรงตำแหน่งทางขวามือของ A แล้วคำนวณหาโมเมนต์ (แรงคู่ควบ) M และแรงเฉือน V ที่กระทำโดยกำแพงที่จุด



วิธีทำ เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ(F.B.D.)และแยกคานออกมาจากกำแพงได้ดังนี้



$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= 50(6)(9.81) \\ &= 2943 \text{ N} = 2.94 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$V + 2 - 1 - 1.5 - 2.94 = 0$$

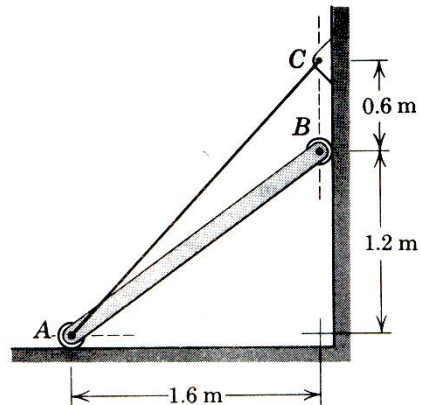
$$V = 3.44 \text{ N} \quad \text{ทิศทางขึ้น} \quad \underline{\underline{Ans}}$$

$$\sum M_A = 0 ;$$

$$M + 2 + 2(4) - 1(2) - 1.5(5) - 2.94(3) = 0$$

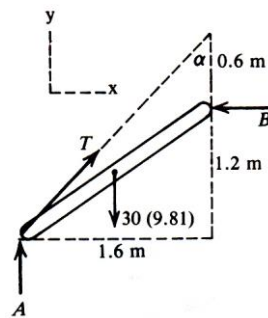
$$M = 8.33 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา} \quad \underline{\underline{Ans}}$$

ตัวอย่างที่ 2. คานสม่ำเสมอมีมวล 30 kg ปลายคานมีลูกกลิ้งตามรูป และยึดให้สมดุลด้วยเส้นลวด AC จงหาแรงดึง T ในเส้นลวดและแรงปฏิกิริยาที่ลูกกลิ้ง A และ B



วิธีทำ

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของคาน ดังรูป



หาค่าต่างๆโดยใช้สมการสมดุลดังนี้

$$\sum M_A = 0 ;$$

$$1.2B - 30(9.81)(0.8) = 0$$

$$B = 196.2 \text{ N } \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{1.6}{1.8} = 41.63^\circ$$

$$\therefore \sin \alpha = 0.6644$$

$$\therefore \cos \alpha = 0.7474$$

$$\sum F_x = 0 ;$$

$$T(\sin \alpha) - B = 0$$

$$T(0.6644) - 196.2 = 0$$

$$T = 95.3 \text{ N } \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$A + T(\cos\alpha C - 30(9.81)) = 0$$

$$A + 295.3(0.7474) - 294.3 = 0$$

$$A = 73.6 \text{ N } \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

วิธีการแก้โจทย์ปัญหา

- อ่านดูโจทย์ให้ละเอียดว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้างและโจทย์ต้องการให้หาอะไร
- เขียนรูปวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของชิ้นส่วนทั้งหมดตามขั้นตอนการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระ
- เขียนแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุอิสระ
- เขียนแรงภายในที่เกิดจากจุดรองรับทั้งหมด ถ้าในกรณีที่โจทย์บอกน้ำหนักของวัตถุมาด้วยก็ให้เขียนแรงที่เกิดจากน้ำหนักเข้าไปด้วย (ปกติน้ำหนักของวัตถุจะกระทำที่กึ่งกลางของวัตถุหรือจุดเซนทรอยด์ หรือโจทย์อาจจะกำหนดให้กระทำที่จุด G)
- เขียนขนาดหรือความยาววัตถุตามที่โจทย์ให้มา (พิจารณาหน่วยของความยาวให้ถูกต้องด้วย)
- กำหนดระบบแกนอ้างอิง X , Y (กรณีระบบสองมิติ) หรือ X , Y , Z ตามกฎมือขวา (กรณีระบบสามมิติ) โดยกำหนดทิศทางบวกตามความถูกต้องและเหมาะสม
- ใช้สมการการสมดุล

กรณีสองมิติได้

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum M = 0$$

กิจกรรมการเรียนรู้การสอน
ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู

ทดสอบ

1. ให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบเรื่อง แรงคู่ควบระบบสองมิติ แรงคู่ควบระบบสามมิติ การย้ายแรงบนวัตถุเกร็ง (30 นาที)
2. ผู้สอนเฉลยแบบทดสอบ (10 นาที)

ขั้นนำ

1. ผู้สอนพูดถึงเนื้อหาเรื่องสมมูลระบบ 2 มิติเงื่อนไขสมมูล ระบบ 2 มิติ(10 นาที)

ขั้นสอน

1. สอนแบบบรรยายในหน่วยที่ 4 (ในหัวข้อย่อย 1 , 2) (70 นาที)
2. สอนสาธิตหลักการคำนวณตัวอย่างที่ 1 , 2 (20 นาที)
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดและเปิด โอกาสให้ผู้เรียนเรียนถาม (25 นาที)
4. เฉลยแบบฝึกหัด (10 นาที)

ขั้นสรุป

1. สรุปเนื้อหาให้ผู้เรียนฟัง (10 นาที)

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

1. ให้ศึกษาเอกสารประกอบการเรียนตามหัวข้อ 1 , 2 และทำรายงานส่ง
2. ให้ทำแบบฝึกหัด
3. .ให้ไปศึกษาเรื่องที่จะเรียนสัปดาห์หน้า

สื่อการเรียนการสอน

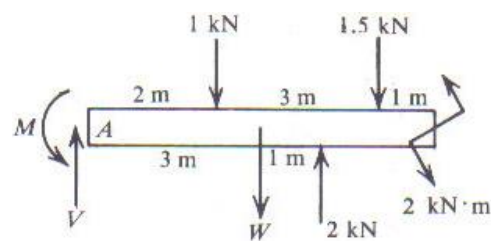
1. เอกสารประกอบการสอนเนื้อหาข้อย่อย 1 ,2
2. แผ่นใสเนื้อหาข้อย่อย 1 ,2

การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตความสนใจผู้เรียน
2. ความรับผิดชอบต่องานที่มอบหมาย
3. การให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมระหว่างเรียน
4. ทำแบบทดสอบ

แบบฝึกหัด

1. คานสม่ำเสมอมีมวล 50 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร ปลายข้างหนึ่งของคานฝังแน่นอยู่ในกำแพง คานถูกกระทำด้วยแรงและแรงคู่ควบดังรูป จงเขียนผังอิสระของคาน โดยแยกโดยแยกคานออกมา ตรงตำแหน่งทางขวามือของ A แล้วคำนวณหาโมเมนต์ (แรงคู่ควบ) M และแรงเฉือน V ที่กระทำโดยกำแพงที่จุด

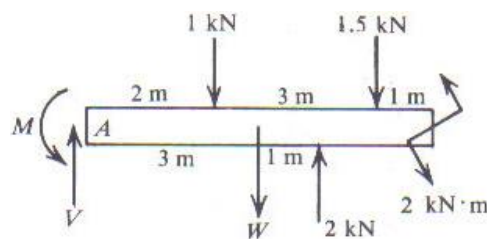


2. จงบอกเงื่อนไขการสมดุลสองมิติ

เฉลยแบบฝึกหัด

1. คานสม่ำเสมอมีมวล 50 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร ปลายข้างหนึ่งของคานฝังแน่นอยู่ในกำแพง คานถูกกระทำด้วยแรงและแรงคู่ควบดังรูป จงเขียนผังอิสระของคาน โดยแยกโดยแยกคานออกมา ตรงตำแหน่งทางขวามือของ A แล้วคำนวณหาโมเมนต์ (แรงคู่ควบ) M และแรงเฉือน V ที่กระทำ โดยกำแพงที่จุด

วิธีทำ เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ(F.B.D.)และแยกคานออกมาจากกำแพงได้ดังนี้



$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= 50(6)(9.81) \\ &= 2943 \text{ N} = 2.94 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$V + 2 - 1 - 1.5 - 2.94 = 0$$

$$V = 3.44 \text{ N} \quad \text{ทิศทางขึ้น} \quad \underline{\underline{Ans}}$$

$$\sum M_A = 0 ;$$

$$M + 2 + 2(4) - 1(2) - 1.5(5) - 2.94(3) = 0$$

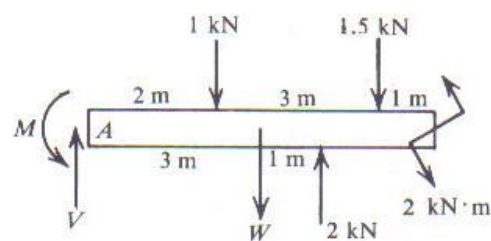
$$M = 8.33 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา} \quad \underline{\underline{Ans}}$$

2. เงื่อนไขสมดุล (ระบบ 2 มิติ) วัตถุจะอยู่ในสมดุลก็ต่อเมื่อแรงลัพธ์และโมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำกับวัตถุเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นการสมดุลในรูปสเกลาร์ได้ดังนี้ (จุด O เป็นจุดใดๆ บนวัตถุหรือนอกวัตถุ)

$$\sum F_x = 0, \quad \sum F_y = 0, \quad \sum M_O = 0$$

แบบทดสอบสัปดาห์ที่ 7

1. คานสม่ำเสมอมีมวล 50 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร ปลายข้างหนึ่งของคานฝังแน่นในกำแพง คานถูกกระทำด้วยแรงและแรงคู่ควบดังรูป จงเขียนผังอิสระของคาน โดยแยกโดยแยกคานออกมา ตรงตำแหน่งทางขวามือของ A แล้วคำนวณหาโมเมนต์ (แรงคู่ควบ) M และแรงเฉือน V ที่กระทำโดยกำแพงที่จุด

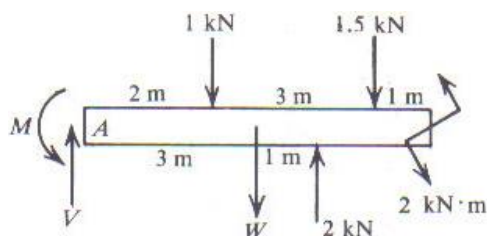


2. จงบอกเงื่อนไขการสมดุลสองมิติ

เฉลยแบบทดสอบสัปดาห์ที่ 7

1. คานสม่ำเสมอมีมวล 50 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร ปลายข้างหนึ่งของคานฝังแน่นอยู่ในกำแพง คานถูกกระทำด้วยแรงและแรงคู่ควบดังรูป จงเขียนฟังก์ชันของคาน โดยแยกโดยแยกคานออกมา ตรงตำแหน่งทางขวามือของ A แล้วคำนวณหาโมเมนต์ (แรงคู่ควบ) M และแรงเฉือน V ที่กระทำโดยกำแพงที่จุด

วิธีทำ เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ(F.B.D.)และแยกคานออกมาจากกำแพงได้ดังนี้



$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= 50(6)(9.81) \\ &= 2943 \text{ N} = 2.94 \text{ kN} \end{aligned}$$

$$\sum F_y = 0 ;$$

$$V + 2 - 1 - 1.5 - 2.94 = 0$$

$$V = 3.44 \text{ N} \quad \text{ทิศทางขึ้น} \quad \underline{\underline{Ans}}$$

$$\sum M_A = 0 ;$$

$$M + 2 + 2(4) - 1(2) - 1.5(5) - 2.94(3) = 0$$

$$M = 8.33 \text{ kN}\cdot\text{m} \quad \text{ทิศทางทวนเข็มนาฬิกา} \quad \underline{\underline{Ans}}$$

2. เงานไขสมดุล (ระบบ 2 มิติ) วัตถุจะอยู่ในสมดุลก็ต่อเมื่อแรงลัพธ์และ โมเมนต์ลัพธ์ที่กระทำกับ วัตถุเป็นศูนย์ ซึ่งเขียนเป็นการสมดุลในรูปสเกลาร์ได้ดังนี้ (จุด O เป็นจุดใดๆ บนวัตถุหรือนอก วัตถุ)

$$\sum F_x = 0 , \quad \sum F_y = 0 , \quad \sum M_O = 0$$

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการเรียนของนักเรียน.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการสอนของครู.....

.....

.....

.....

.....

.....