	<b>แผนการจัดการเรียนรู้</b>	<b>หน่วยที่ 4</b>
	ชื่อวิชา กลศาสตร์วิศวกรรม 1.	<b>สอนครั้งที่ 9</b>
	ชื่อหน่วย สมดุลวัตถุ ( ต่อ )	<b>จำนวน 3 ชั่วโมง</b>
<p><b>หัวเรื่อง</b></p> <p>4.5 การสมดุลสามมิติ</p> <p><b>สาระสำคัญ</b></p> <p>1.การสมดุลสามมิติคือแรงกระทำต่ออนุภาคอยู่ในรูปขององค์ประกอบ<i>i,j,k</i> จะเขียนสมการได้ว่า <math>\sum F_x i + \sum F_y j + \sum F_z k = 0</math></p> <p>2.เงื่อนไขสำหรับการสมดุลสามมิติเมื่อถูกแรงสามมิติกระทำ ทั้งแรงลัพธ์ และโมเมนต์แรงคู่ควบลัพธ์บนวัตถุมีค่าเท่ากับศูนย์มีสองเงื่อนไขสำหรับสมดุลในรูปเวกเตอร์คือ <math>\sum F = 0</math> และ <math>\sum M = 0</math></p> <p><b>สมรรถนะที่พึงประสงค์ ( ความรู้ ทักษะ คุณธรรม จริยธรรม จรรยาบรรณ วิชาชีพ )</b></p> <ol style="list-style-type: none"> <li>ผู้เรียนสามารถใช้สมการสมดุลสาม มิติเพื่อแก้ไขโจทย์ปัญหาในระบบ สามมิติได้อย่างถูกต้อง</li> <li>ผู้เรียนสามารถบอกเงื่อนไขในการสมดุลสามมิติได้อย่างถูกต้อง</li> </ol>		

## เนื้อหาสาระ

### 4.5 สมการสมดุลสามมิติ

จากสมการสมดุลของอนุภาค

$$\sum F = 0$$

ถ้าแรงกระทำต่ออนุภาคอยู่ในรูปขององค์ประกอบ  $i, j, k$  จะได้

$$\text{ว่า } \sum F_x i + \sum F_y j + \sum F_z k = 0$$

เทียบสัมประสิทธิ์

$$\sum F_x = 0$$

$$\sum F_y = 0$$

$$\sum F_z = 0$$

### แผนภาพวัตถุอิสระ (Free Body Diagram)(F.BD.)

ขั้นตอนการแก้ปัญหสมดุลสามมิติ เหมือนในกรณีสองมิติ คือ เขียนแผนภาพวัตถุอิสระของวัตถุ ซึ่งจำเป็นต้องกล่าวถึงชนิดของแรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับเสียก่อน

### แรงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ (Support Reaction)

แรงปฏิกิริยาและโมเมนต์แรงคู่ควบกระทำที่ฐานรองรับ และการต่อเชื่อมใดๆ เมื่อชิ้นส่วนอยู่ในรูปสามมิติ ให้ดูตามตารางที่ถ่ายเอกสารมาและโมเมนต์ของแรงคู่ควบในแต่ละฐานรองรับอธิบายตามตารางแสดง

### การเขียนแผนภาพวัตถุอิสระ

วัตถุจะถูกแยกอิสระและวาดรูปต่างๆ จากนั้นก็ใช้สัญลักษณ์แรงและโมเมนต์ของแรงคู่ควบทั้งหมดตามพิกัด  $x, y,$  และ  $z$  ตามกฎทั่วไป เช่น ทิศทางของโมเมนต์ถูกกำหนดโดยกฎมือขวา หรือการตั้งแกนอ้างอิง  $x, y,$  และ  $z$  ก็เป็นไปตามกฎมือขวาเช่นกัน แรงย่อยของแรงปฏิกิริยาจะมีขนาดและทิศทางที่ไม่ทราบค่าแสดงกระทำบนแผนภาพวัตถุอิสระในทิศทางบวก ในวิธีนี้ ถ้าค่าที่หาได้เป็นลบก็จะบ่งบอกว่าแรงย่อยกระทำในทิศทางตรงกันข้ามกับที่กำหนดไว้ แรงกระทำโดยทั่วไปเกิดจากน้ำหนักกระทำภายนอก และแรงที่ผิวสัมผัสใกล้เคียงปฏิกิริยาที่ฐานรองรับ และน้ำหนักของวัตถุ โดยทั่วไปแสดงแรงย่อยที่ไม่ทราบค่าทั้งหมดในทิศทางบวก ขนาดของวัตถุจำเป็นสำหรับโมเมนต์ของแรง จึงต้องรวมอยู่ใน (F.BD.)

### สมการสมดุล(Equation Of Equilibrium)

เงื่อนไขสำหรับการสมดุลของวัตถุแข็งเกร็งที่ถูกแรงสามมิติกระทำ ทั้งแรงลัพธ์ และ โมเมนต์แรงคู่ควบลัพธ์บนวัตถุมีค่าเท่ากับศูนย์

มีสองเงื่อนไขสำหรับสมดุลในรูปเวกเตอร์คือ

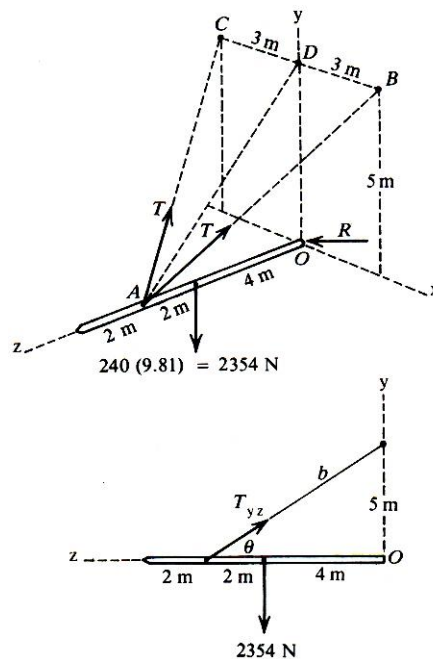
$$\sum \mathbf{F} = 0 \quad \text{และ} \quad \sum \mathbf{M} = 0$$

เมื่อ  $\sum \mathbf{F}$  เป็นผลรวมของแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุทั้งหมดและ  $\sum \mathbf{M}$  เป็นผลรวมโมเมนต์แรงคู่ควบและ โมเมนต์ของแรงทั้งหมดรอบจุดใดๆ (O) ซึ่งอาจอยู่บนหรือภายนอกวัตถุซึ่ง

$$\sum \mathbf{F} = \sum F_x \mathbf{i} + \sum F_y \mathbf{j} + \sum F_z \mathbf{k}$$

$$\sum \mathbf{M}_O = \sum M_x \mathbf{i} + \sum M_y \mathbf{j} + \sum M_z \mathbf{k}$$

**ตัวอย่างที่ 1.** boom ขนาดสม่ำเสมออยู่ในแนวระดับ มีมวล 240 kg ที่จุด A ยึดด้วยเคเบิลสองเส้นซึ่งตรึงกับผนังที่จุด B และ C ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งยึดติดกับผนัง ที่จุด O ด้วย ball และ socket joint จงหาแรงตึง T ในสายเคเบิล AC



วิธีทำ

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของ boom ได้  
ดังรูป

ให้ระยะ  $AD = b$

$$\text{ระยะ } l = \sqrt{3^2 + 5^2 + 6^2} = 8.37 \text{ m}$$

แตกแรง  $T$  ทั้งสอง ไปในระนาบ  $y-z$

$$\therefore T_{YZ} = 2T \left( \frac{b}{l} \right)$$

$$\sum M_o = 0 ;$$

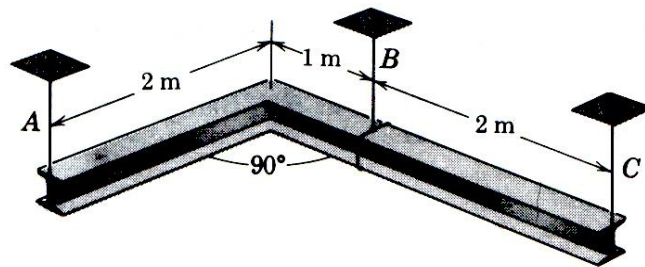
$$T_{YZ} \sin \theta (6) - 2354(4) = 0$$

$$2T \left( \frac{b}{l} \right) \left( \frac{5}{b} \right) (6) - 2354(4) = 0$$

$$T = \frac{2354(4)(8.37)}{60}$$

$$= 1313 \text{ N } \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

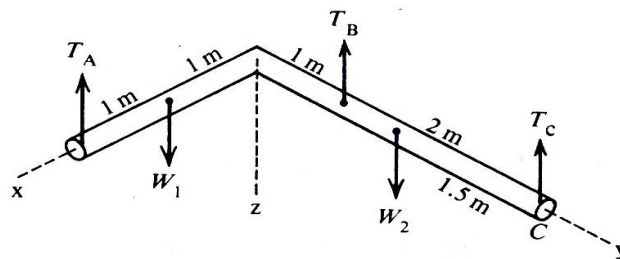
**ตัวอย่างที่ 2.** คานเหล็กกล้าสองอันเชื่อมต่อกันเป็นมุมจากคานแต่ละอันมีมวล 40 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร คานถูกยึดด้วยสายเคเบิล A, B และ C จนทำให้คานอยู่ในแนวระดับจงหาแรงดึงในสายเคเบิลทั้งสาม



### วิธีทำ

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของคานเหล็กได้

ดังรูป



จากโจทย์บอกน้ำหนักของวัสดุมา 40 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร

$$W_1 = 40(2)(9.81) = 784.8 \text{ N}$$

$$W_2 = 40(3)(9.81) = 1177.2 \text{ N}$$

$$[\sum M_y = 0];$$

$$2T_A - 784.8(1) = 0$$

$$T_A = 392.4 \text{ N} \quad \underline{\text{Ans}}$$

$$[\sum (M_C)_x = 0];$$

$$1177.2(1.5) + 784.8(3) - 392.4(3) - 2T_B = 0$$

$$T_B = 1471.5 \text{ N} \quad \underline{\text{Ans}}$$

$$[\sum F_z = 0];$$

$$392.4 + 1471.5 + T_C - 784.8 - 1177.2 = 0$$

$$T_C = 98.1 \text{ N} \quad \underline{\text{Ans}}$$

ข้อสังเกต

$(\sum M_c)_x$  คือโมเมนต์รอบแกนที่ขนานกับ แกน  $x$  ซึ่งลากผ่านจุด C

วิธีการแก้โจทย์ปัญหา

- อ่านคู่มือให้ละเอียดว่าโจทย์กำหนดอะไรมาให้บ้างและโจทย์ต้องการให้หาอะไร
- เขียนรูปวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของชิ้นส่วนทั้งหมดตามขั้นตอนการเขียนแผนภาพวัตถุอิสระ
- เขียนแรงภายนอกที่กระทำต่อวัตถุอิสระ
- เขียนแรงภายในที่เกิดจากจุดรองรับทั้งหมด ถ้าในกรณีที่โจทย์บอกน้ำหนักของวัตถุมาด้วยก็ให้เขียนแรงที่เกิดจากน้ำหนักเข้าไปด้วย (ปกติน้ำหนักของวัตถุจะกระทำที่กึ่งกลางของวัตถุหรือจุดเซนทรอยด์ หรือโจทย์อาจจะกำหนดให้กระทำที่จุด G )
- เขียนขนาดหรือความยาววัตถุตามที่โจทย์ให้มา (พิจารณาหน่วยของความยาวให้ถูกต้องด้วย)
- กำหนดระบบแกนอ้างอิง  $X$  ,  $Y$  (กรณีระบบสองมิติ) หรือ  $X$  ,  $Y$  ,  $Z$  ตามกฎมือขวา (กรณีระบบสามมิติ) โดยกำหนดทิศทางบวกตามความถูกต้องและเหมาะสม
- ใช้สมการการสมดุล

กรณีสองมิติได้

**กิจกรรมการเรียนรู้การสอน**  
**ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู**

**ทดสอบ**

1. ให้ผู้เรียนทำแบบทดสอบเรื่องแผนภาพอิสระของวัตถุ การแยกระบบอิสระ ( 30 นาที )
2. ผู้สอนเฉลยแบบทดสอบ ( 10 นาที )

**ขั้นนำ**

1. ผู้สอนพูดถึงเนื้อหาเรื่องการสมมูลสามมิติ  
เงื่อนไขการสมมูลสามมิติ ( 5 นาที )

**ขั้นสอน**

1. สอนแบบบรรยายในหน่วยที่ 4 ( ในหัวข้อย่อย 1 , 2 ) ( 70 นาที )
2. สอนสาธิตหลักการคำนวณตัวอย่างที่ 1 , 2 ( 20 นาที )
3. ให้นักเรียนทำแบบฝึกหัดและเปิด โอกาสให้ผู้เรียนเรียนถาม ( 25 นาที )
4. เฉลยแบบฝึกหัด ( 10 นาที )

**ขั้นสรุป**

1. ผู้สอนสรุปเนื้อหาให้ผู้เรียนฟัง ( 10 นาที )

**งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม**

1. ให้ศึกษาเอกสารประกอบการเรียนตามหัวข้อ 1 , 2 , และทำรายงานส่ง
2. ให้ทำแบบฝึกหัด
3. ให้ไปศึกษาเรื่องที่จะเรียนสัปดาห์หน้า

**สื่อการเรียนการสอน**

1. เอกสารประกอบการสอนเนื้อหาข้อย่อย 1 , 2 ,
2. แผ่นใสเนื้อหาข้อย่อย 1 , 2 ,

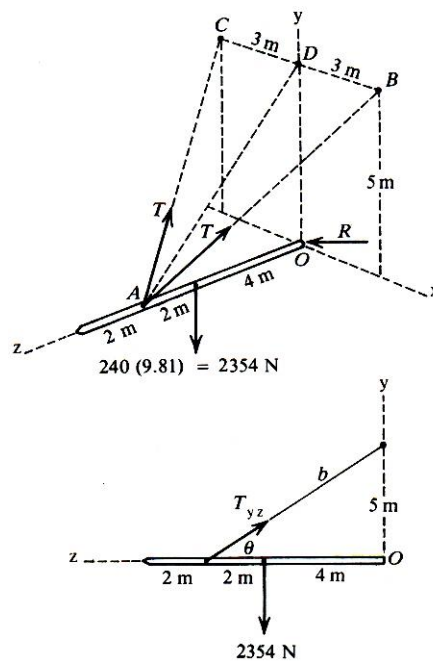
**การวัดผลและประเมินผล**

1. สังเกตความสนใจผู้เรียน
2. ความรับผิดชอบต่องานที่มอบหมาย
3. การให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมระหว่างเรียน
4. ทำแบบทดสอบ

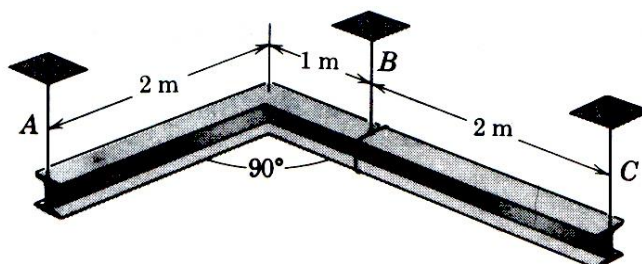


## แบบฝึกหัด

1. boom ขนาดสม่ำเสมออยู่ในแนวระดับ มีมวล 240 kg ที่จุด A ยึดด้วยเคเบิลสองเส้นซึ่งตั้งกับผนังที่จุด B และ C ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งยึดติดกับผนังที่จุด O ด้วย ball และ socket joint จงหาแรงดึง T ในสายเคเบิล AC

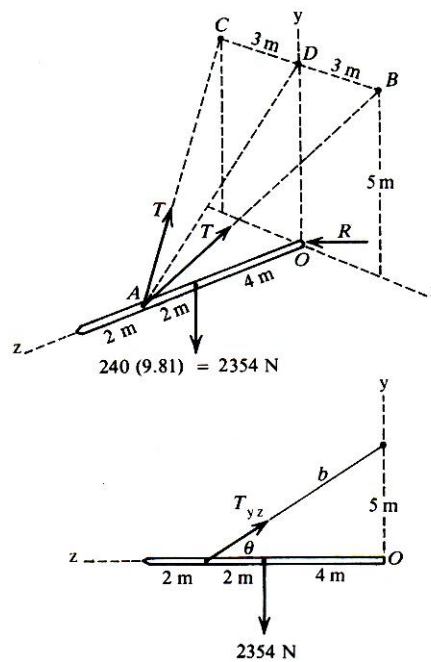


2. คานเหล็กกล้าสองอันเชื่อมต่อกันเป็นมุมฉากคานแต่ละอันมีมวล 40 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร คานถูกยึดด้วยสายเคเบิล A, B และ C จนทำให้คานอยู่ในแนวระดับจงหาแรงดึงในสายเคเบิลทั้งสาม



### เฉลยแบบฝึกหัด

1. *boom* ขนาดสม่ำเสมออยู่ในแนวระดับ มีมวล 240 kg ที่จุด A ยึดด้วยเคเบิลสองเส้นซึ่งตั้งกับผนังที่จุด B และ C ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งยึดติดกับผนัง ที่จุด O ด้วย ball และ socket joint จงหาแรงตึง T ในสายเคเบิล AC



#### วิธีทำ

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของ boom ได้

ดังรูป

ให้ระยะ  $AD = b$

$$\text{ระยะ } l = \sqrt{3^2 + 5^2 + 6^2} = 8.37 \text{ m}$$

แตกแรง T ทั้งสอง ไปในระนาบ  $y-z$

$$\therefore T_{yz} = 2T \left( \frac{b}{l} \right)$$

$$\sum M_o = 0 ;$$

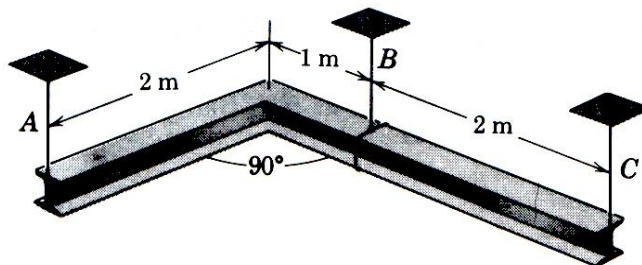
$$T_{yz} \sin\theta(6) - 2354(4) = 0$$

$$2T\left(\frac{b}{l}\right)\left(\frac{5}{b}\right)(6) - 2354(4) = 0$$

$$T = \frac{2354(4)(8.37)}{60}$$

$$= 1313 \text{ N } \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

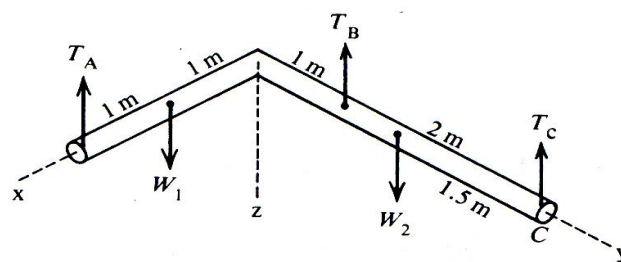
2. คานเหล็กกล้าสองอันเชื่อมต่อกันเป็นมุมจากคานแต่ละอันมีมวล 40 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร คานถูกยึดด้วยสายเคเบิล A, B และ C จนทำให้คานอยู่ในแนวระดับจงหาแรงตึงในสายเคเบิลทั้งสาม



### วิธีทำ

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของคานเหล็กได้

ดังรูป



จากโจทย์บอกน้ำหนักของวัตถุมา 40 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร

$$W_1 = 40(2)(9.81) = 784.8 \text{ N}$$

$$W_2 = 40(3)(9.81) = 1177.2 \text{ N}$$

$$[\sum M_y = 0] ;$$

$$2T_A - 784.8(1) = 0$$

$$T_A = 392.4 \text{ N} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

$$[\sum (M_C)_x = 0];$$

$$1177.2(1.5) + 784.8(3) - 392.4(3) - 2T_B = 0$$

$$T_B = 1471.5 \text{ N} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

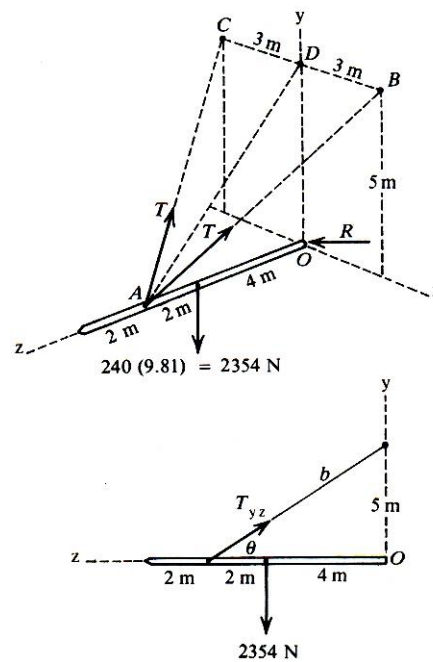
$$[\sum F_z = 0];$$

$$392.4 + 1471.5 + T_C - 784.8 - 1177.2 = 0$$

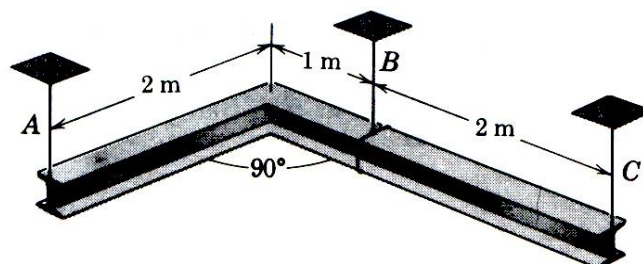
$$T_C = 98.1 \text{ N} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

### แบบทดสอบสัปดาห์ที่ 9

1. boom ขนาดสม่ำเสมออยู่ในแนวระดับ มีมวล 240 kg ที่จุด A ยึดด้วยเคเบิลสองเส้นซึ่งตั้งกับผนังที่จุด B และ C ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งยึดติดกับผนังที่จุด O ด้วย ball และ socket joint จงหาแรงดึง T ในสายเคเบิล AC

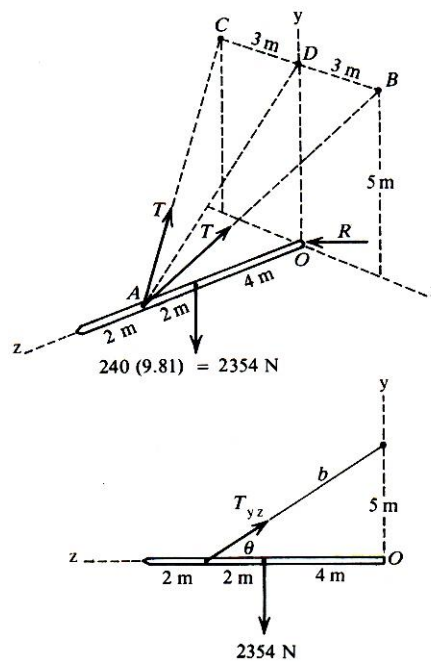


2. คานเหล็กกล้าสองอันเชื่อมต่อกันเป็นมุมฉากคานแต่ละอันมีมวล 40 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร คานถูกยึดด้วยสายเคเบิล A, B และ C จนทำให้คานอยู่ในแนวระดับจงหาแรงดึงในสายเคเบิลทั้งสาม



### เฉลยแบบทดสอบสัปดาห์ที่ 9

1. boom ขนาดสม่ำเสมออยู่ในแนวระดับ มีมวล 240 kg ที่จุด A ยึดด้วยเคเบิลสองเส้นซึ่งตั้งกับผนังที่จุด B และ C ส่วนปลายอีกด้านหนึ่งยึดติดกับผนัง ที่จุด O ด้วย ball และ socket joint จงหาแรงตึง T ในสายเคเบิล AC



#### วิธีทำ

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของ boom ได้

ดังรูป

ให้ระยะ  $AD = b$

$$\text{ระยะ } l = \sqrt{3^2 + 5^2 + 6^2} = 8.37 \text{ m}$$

แตกแรง T ทั้งสอง ไปในระนาบ y-z

$$\therefore T_{yz} = 2T \left( \frac{b}{l} \right)$$

$$\sum M_o = 0 ;$$

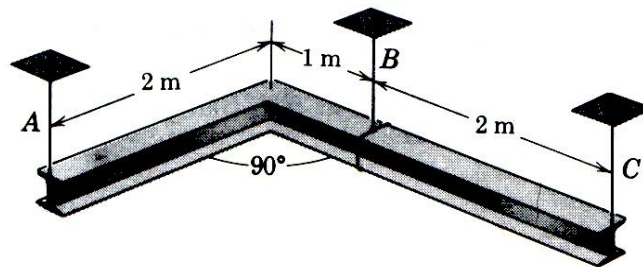
$$T_{yz} \sin\theta(6) - 2354(4) = 0$$

$$2T\left(\frac{b}{l}\right)\left(\frac{5}{b}\right)(6) - 2354(4) = 0$$

$$T = \frac{2354(4)(8.37)}{60}$$

$$= 1313 \text{ N } \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

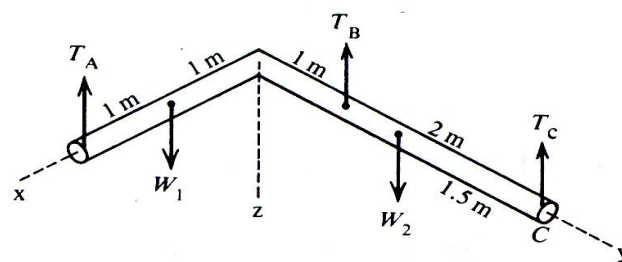
2. คานเหล็กกล้าสองอันเชื่อมต่อกันเป็นมุมจากคานแต่ละอันมีมวล 40 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร คานถูกยึดด้วยสายเคเบิล A, B และ C จนทำให้คานอยู่ในแนวระดับจงหาแรงตึงในสายเคเบิลทั้งสาม



### วิธีทำ

เขียนแผนภาพวัตถุอิสระ (F.B.D.) ของคานเหล็กได้

ดังรูป



จากโจทย์บอกน้ำหนักของวัตถุมา 40 kg ต่อความยาวหนึ่งเมตร

$$W_1 = 40(2)(9.81) = 784.8 \text{ N}$$

$$W_2 = 40(3)(9.81) = 1177.2 \text{ N}$$

$$[\sum M_y = 0] ;$$

$$2T_A - 784.8(1) = 0$$

$$T_A = 392.4 \text{ N} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

$$[\sum (M_C)_x = 0];$$

$$1177.2(1.5) + 784.8(3) - 392.4(3) - 2T_B = 0$$

$$T_B = 1471.5 \text{ N} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$

$$[\sum F_z = 0];$$

$$392.4 + 1471.5 + T_C - 784.8 - 1177.2 = 0$$

$$T_C = 98.1 \text{ N} \quad \underline{\underline{\text{Ans}}}$$



**บันทึกหลังการสอน**

ผลการใช้แผนการสอน.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการเรียนของนักเรียน.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการสอนของครู.....

.....

.....

.....

.....

.....