	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

หัวข้อเรื่อง

1. วิธีคำนวณหาการโก่งของคาน

สาระสำคัญ

1. ในการคำนวณหาการโก่งของคานนั้นมีอยู่หลายวิธี แต่วิธีที่ใช้คำนวณที่ใช้กันมาก มีอยู่ 3 วิธี คือวิธี Double-integration ,วิธี Moment-area ,วิธี Superposition

วัตถุประสงค์

1. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถคำนวณหาค่าการโก่งของคานโดยวิธี Double-integration ได้อย่างถูกต้อง
2. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถคำนวณหาค่าการโก่งของคานโดยวิธี Moment-area ได้อย่างถูกต้อง
3. เพื่อให้ผู้เรียนสามารถคำนวณหาค่าการโก่งของคานโดยวิธี Superposition ได้อย่างถูกต้อง

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

เนื้อหาสาระ

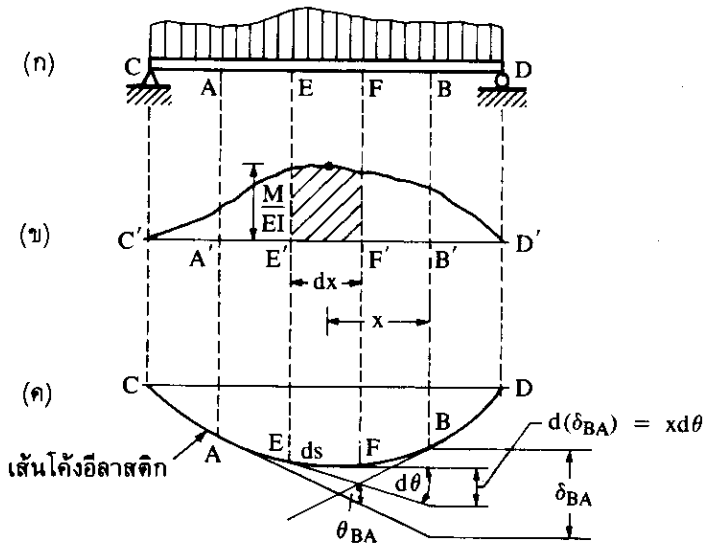
1. วิธีคำนวณหาการโก่งของคาน

วิธีคำนวณหาการโก่งของคานนั้นมีอยู่หลายแบบ ในที่นี้จะกล่าวเพียง วิธีเดียวคือ วิธี Moment-area, วิธี Double-integration ,วิธี Superposition

1.1 วิธี Moment-area

วิธีของ moment-area เป็น Simi graphical method ซึ่งจะทำให้สามารถหาความลาดเอียงและระยะโก่ง ณ ตำแหน่งใด ๆ บนเส้นโค้งอีลาสติกของคานได้ และถ้าหากว่าเราต้องการที่จะทราบแต่เพียงความลาดเอียง หรือระยะโก่งของเส้นโค้งอีลาสติกเพียงสองสามตำแหน่งเท่านั้น วิธีนี้จะมีความสะดวกและรวดเร็วกว่าวิธี double-integration แต่ถ้าต้องการที่จะได้ลักษณะของเส้นโค้งอีลาสติกตลอดความยาวของคานแล้ว ก็ควรที่จะใช้วิธี double-integration

ทฤษฎีที่ใช้หาความลาดเอียงและระยะโก่งที่ใช้ในวิธี Moment-area จะมีอยู่ด้วยกัน 2 ทฤษฎี คือทฤษฎีหนึ่งจะใช้สำหรับหาความลาดเอียง อีกทฤษฎีหนึ่งใช้สำหรับหาระยะโก่งของคานนั้น



รูปที่ 1 การหาความลาดเอียงและระยะโก่ง

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

ในการพิสูจน์หาทฤษฎีทั้งสองนั้นให้พิจารณาคานซึ่งถูกกระทำด้วยแรงใด ๆ ในรูป ถ้าคานมีหน้าตัดสม่ำเสมอ (EI = ค่าคงที่) $\frac{M}{EI}$...diagram จะมีรูปร่างเช่นเดียวกับ BMD ดังในรูป ส่วนโค้งอีลาสติกจะแสดงในรูปที่

จากความสัมพันธ์ที่ได้ว่า $\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI}$

เมื่อกรณีที่ระยะโก่งของคานมีค่าน้อยมากค่า $ds \approx dx$

$$\therefore \frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI}$$

$$d\theta = \frac{Mdx}{EI}$$

$$\int_B^A d\theta = \int_B^A \frac{Mdx}{EI} \qquad \theta_{AB} = \int_B^A \frac{Mdx}{EI}$$

เมื่อ θ_{AB} คือมุมระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด A และ B บนเส้นโค้งอีลาสติกมีค่าเท่ากับพื้นที่ทั้งหมดของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่างจุด A และจุด B ในกรณีที่พื้นที่มีทั้งบวกและลบ ก็ให้คิดเครื่องหมายของพื้นที่เหล่านั้นด้วย

ฉะนั้นเราจะได้ทฤษฎีที่หนึ่งว่า “เมื่อคานตรงถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด มุมระหว่างเส้นสัมผัสที่ลากจากจุดใด ๆ สองจุดบนเส้นโค้งอีลาสติก จะมีค่าเท่ากับพื้นที่ทั้งหมดของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่างสองจุดนั้น”

ต่อไปให้ δ_{AB} เป็นระยะทางในแนวดิ่งของจุด B เมื่อเทียบกับเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด A ไป ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ว่า

$$d(\delta_{AB}) = x d\theta$$

$$\int d(\delta_{AB}) = \int_B^A x d\theta$$

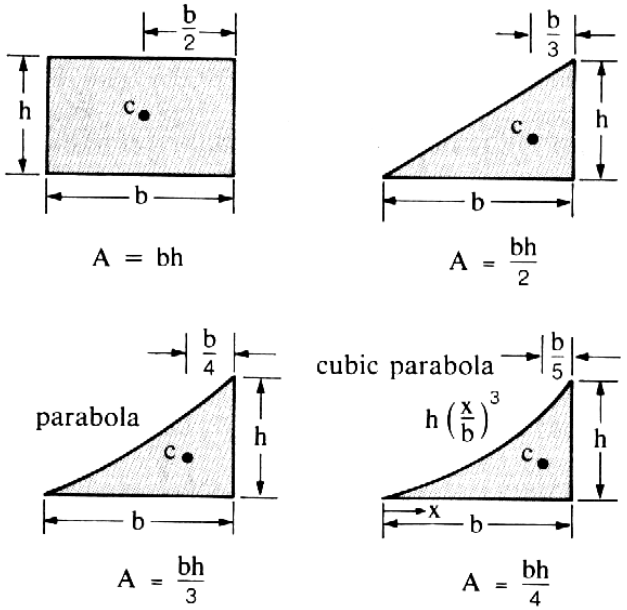
	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

$$\delta_{BA} = \int_{B}^{A} \frac{Mxdx}{EI}$$

จะเห็นได้ว่า $\int_{B}^{A} \frac{Mxdx}{EI}$ เป็นค่าของโมเมนต์ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่างจุด A และจุด B เทียบกับแกนผ่านจุด B ฉะนั้นจึงได้ทฤษฎีสำหรับการหาระยะโก่งซึ่งเป็นทฤษฎีที่สองว่า “เมื่อคานตรงถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัด ระยะในแนวดิ่งของจุด B เมื่อเทียบกับเส้นสัมผัสที่ลากจากจุด A จะมีค่าเท่ากับโมเมนต์รอบแกนซึ่งผ่านจุด B ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ระหว่างจุดทั้งสองนั้น”

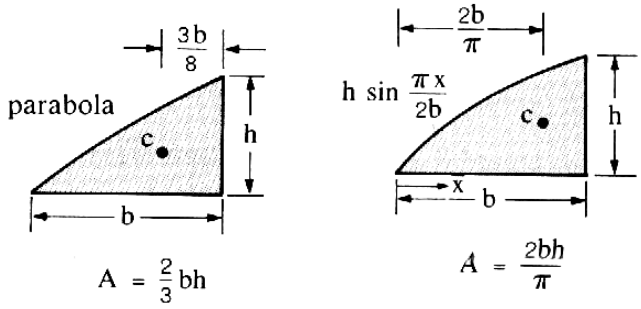
ในการหาโมเมนต์ของ $\frac{M}{EI}$ diagram ซึ่งมีพื้นที่ที่มีทั้งค่าบวกและลบก็ให้คิดเครื่องหมายของพื้นที่เหล่านั้นด้วย

เนื่องจากการคำนวณหาระยะโก่ง โดยวิธีนี้มีความจำเป็นที่จะต้องรวมโมเมนต์ของพื้นที่รอบแกนๆ หนึ่งเสมอ ฉะนั้นจึงแสดงถึงจุดศูนย์ถ่วงของพื้นทีชนิดต่าง ๆ ซึ่งต้องใช้อยู่บ่อยครั้งดังต่อไปนี้



รูปที่ 2 จุดศูนย์ถ่วงของพื้นทีชนิดต่าง ๆ

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**



รูปที่ 3 จุดศูนย์ถ่วงของพื้นทีชนิดต่าง ๆ

1.1.1ขั้นตอนการหาค่าความลาดเอียงและระยะโก่งโดยวิธี Moment-area

1. จากโจทย์ที่กำหนดให้ถ้าเป็นคานแบบช่วงเดียวหรือคานช่วงเดียวปลายยื่น จะต้องคำนวณหาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับก่อน ส่วนคานแบบยื่นไม่จำเป็นจะต้องหา

2. เขียนแผนผังของโมเมนต์ดัด (BMD) จากการคำนวณหาได้จากโจทย์ที่กำหนดให้

3. เขียนเส้นโค้งอีลาสติก แสดงถึงลักษณะการโก่งของคานให้ใกล้เคียงกับความเป็นจริงมากที่สุด

4. เขียนแผนผังของ $\frac{M}{EI}$ diagram

5. เลือกจุดบนเส้นโค้งอีลาสติกที่ทราบค่าความลาดเอียงหรือระยะโก่ง เช่น จุดรองรับหรือจุดที่อยู่ในแกนสมมาตร หรือจุดที่โจทย์กำหนดค่าแน่นอนมาให้ เป็นต้น แล้วลากเส้นสัมผัสกับจุดที่เลือกนั้น

6. คำนวณการเคลื่อนที่ของจุดเทียบจากเส้นสัมผัสในข้อ 5

7. คำนวณหาระยะโก่งและความลาดเอียง โดยการพิจารณาลักษณะของเส้นโค้งอีลาสติกและอาศัยทฤษฎีทั้งสองทฤษฎีนั้นเข้าช่วย

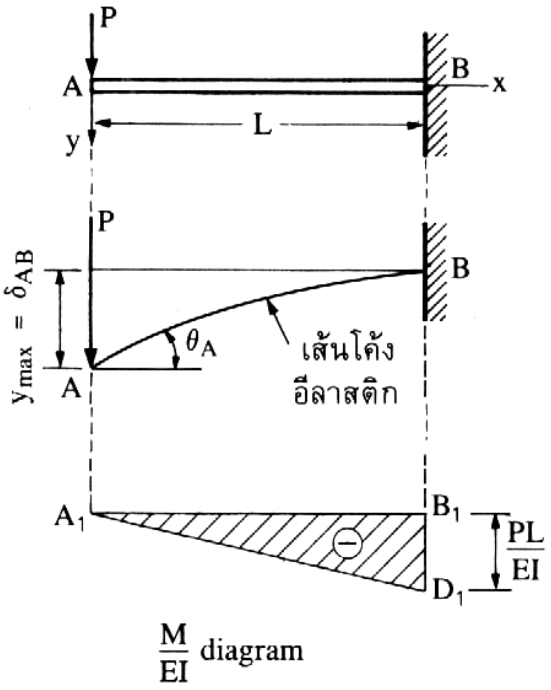
	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

ตัวอย่างที่ 1

จงคำนวณหาระยะโก่งและมุมลาดเอียงที่ปลายคาน กำหนดให้ EI มีค่าคงที่ตลอดความยาวคานโดยวิธี moment-area

<u>วิธีทำ</u> จากรูปจะเห็นว่า $y_{max} = \delta_{AB}$

= โมเมนต์ของพื้นที่ $A_1B_1D_1$ รอบแกนผ่านจุด A_1



$\frac{M}{EI}$ diagram

$$y_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{EI}\right)(L)\left(\frac{2}{3}L\right)$$

$$= \frac{1pL^3}{3EI}$$

$\therefore$ ระยะโก่งปลายคาน $= \frac{PL^3}{3EI}$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

$$\theta_{AB} = \theta_A$$

$$= \text{พื้นที่ของ } A_1B_1D_1$$

$$\theta_A = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{EI}\right)(L)$$

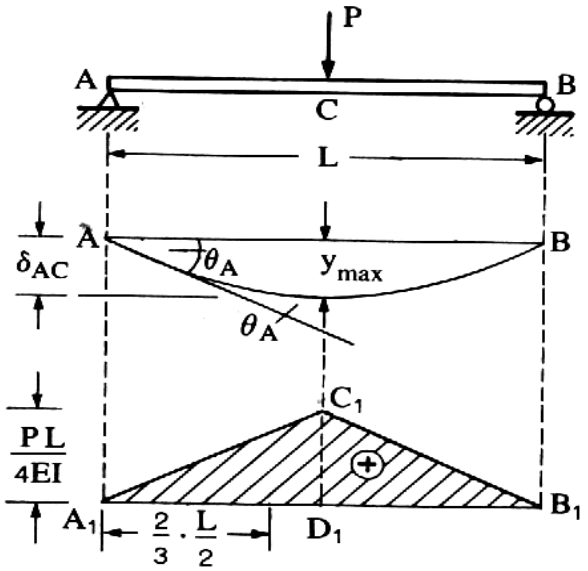
$$= \frac{PL^2}{2EI}$$

ตอบ มุมลาดเอียงที่ปลายคาน $= \frac{PL^2}{2EI}$

ตัวอย่างที่ 2

คานแบบ simply supported ถูกแรงกระทำที่จุดกึ่งกลางของคาน จงหามุมลาดเอียง A และระยะโก่งสูงสุด โดยวิธี moment-area

วิธีทำ เขียนรูปได้ดังนี้



$\frac{M}{EI}$ diagram

จากรูปจะเห็นว่า

θ_A = มุมลาดเอียง = พื้นที่ของ $A_1C_1D_1$

$$\theta_A = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

$$= \frac{PL^2}{16EI}$$

ตอบ มุมลาดเอียง $= \frac{PL^2}{16EI}$

$y_{max} = \delta_{AC} =$ โมเมนต์ของพื้นที่ $A_1C_1D_1$ รอบแกนผ่านจุด A_1

$$y_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{PL^3}{48EI}$$

ตอบ ระยะโก่งสูงสุด $= \frac{PL^3}{48EI}$

1.2 วิธี Double-integration

วิธี Double-integration เป็นวิธีการหาระยะการโก่งและค่าความลาดเอียง ตลอดจนหาเส้นโค้งอิลาสติกตลอดความยาวของคานนั้น เป็นวิธีการที่ใช้การอินทิเกรตสองครั้ง

พิจารณาเส้นโค้งอีลาสติกของคานซึ่งถูกแรงภายนอกกระทำให้เกิดการโค้งงอ โดยให้เป็นความยาวส่วนหนึ่งของเส้นโค้งอิลาสติกนี้ คือจุดศูนย์กลางของความโค้งและ เป็นรัศมีของความโค้งของเส้นโค้งอีอิลาสติก ณ หน้าตัด ใด ๆ ในการที่จะหาความสัมพันธ์เพื่อหาสูตรสำหรับวิธี double-integration นั้นจะต้องใช้ข้อสมมติฐานที่กล่าวมาข้างต้นแล้วยังสมมติให้ระยะโก่งมีค่าน้อยมากจนกระทั่งความยาว ds ซึ่งเป็นเส้นโค้งมีค่าประมาณเท่ากับ dx ซึ่งเป็นเส้นตรงอีกด้วย และเป็นรัศมีของความโค้งของเส้นโค้งอิลาสติก ณ หน้าตัด ใด ๆ ในการที่จะหาความสัมพันธ์เพื่อหาสูตรสำหรับวิธี double-integration นั้นจะต้องใช้ข้อสมมติฐานที่กล่าวมาข้างต้นแล้วยังสมมติให้ระยะโก่งมีค่าน้อยมากจนกระทั่งความยาว ds ซึ่งเป็นเส้นโค้งมีค่าประ มาณเท่ากับ dx ซึ่งเป็นเส้นตรงอีกด้วย

จากรูปจะได้ความสัมพันธ์ $ds = \rho \cdot d\theta$

หรือ $$\frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds}$$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

แต่ $$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI}$$

$$\therefore \frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI}$$

เนื่องจาก $ds \approx dx$ และ $\theta = \frac{dy}{dx}$ ดังนั้น

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{M}{EI}$$

1.2.1 ข้อตกลงเรื่องเครื่องหมาย

จากสมการข้างต้นจะมีเครื่องหมายบวก + และลบ – อยู่ ซึ่งขึ้นอยู่กับการกำหนดเครื่องหมายของโมเมนต์ดัด M และจุดโคออร์ดิเนต x ,y ตามเครื่องหมาย M ,x และ y ที่เรากำหนดมาตั้งแต่ต้น จะเห็นว่าเมื่อเส้นโค้งอิลาสติกหงายขึ้น ซึ่งตรงกับค่า M เป็นบวก (+) ค่าความลาด $\frac{dy}{dx}$ จะลดลง เมื่อ x เพิ่มขึ้น ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2}$ เป็นลบ (-) เมื่อเส้นโค้งอิลาสติกคว่ำลงซึ่ง

ตรงกับค่า M เป็นลบ (-) ค่าความลาด $\frac{dy}{dx}$ จะเพิ่มขึ้น เมื่อ x เพิ่มขึ้น ดังนั้น $\frac{d^2y}{dx^2}$ เป็นบวก (+)

จากข้อความข้างต้น เราพอสรุปได้ว่า $\frac{d^2y}{dx^2}$ และ M จะมีเครื่องหมายตรงกันข้าง เสมอไปเขียนสมการใหม่ เพื่อให้สอดคล้องตามเครื่องหมายจะได้

$$EI\frac{d^2y}{dx^2} = -M$$

$$EI\frac{d^3y}{dx^3} = -V$$

$$EI\frac{d^4y}{dx^4} = \frac{dV}{dx} = w$$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

เมื่อ M คือโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในคานนั้น

I คือโมเมนต์ของความเฉื่อยของหน้าตัดคาน

E คือโมดูลัสของการยืดหยุ่นของวัสดุที่กระทำกับคาน

V คือแรงเฉือนที่เกิดขึ้นในคานนั้น

W คือน้ำหนักบรรทุกที่กระทำกับคาน

x,y คือโคออร์ดิเนตของจุดบนเส้นโค้งอิลาสติก

1.2.2 ขั้นตอนการหาค่าความลาดเอียงและระยะโก่งโดยวิธี Double-intergration

1. เขียนรูปแสดงการสมดุลยูเคชั่นของส่วนของคานที่รับน้ำหนัก แล้วดูลักษณะการโก่งของคานก่อน

2.เลือกจุดเริ่มต้น และตั้งแกน x,y แล้วกำหนดเครื่องหมายให้ถูกต้อง

3. เขียนสมการของโมเมนต์ดัด M อยู่ในเทอมของระยะ x และแรงหรือน้ำหนักที่กระทำ

4.แทนค่าของโมเมนต์ดัด M ลงในสมการเส้นโค้งอีลาสติกแก้สมการดิฟเฟอเรนเชียลของสมการเส้นโค้งอีลาสติก

5.การอินทิเกรต ในการอินทิเกรตครั้งแรกจะได้สมการของความลาดเอียงและตัวคงที่หนึ่งตัว เมื่ออินทิเกรตครั้งที่สองจะได้สมการของการโก่งและมีตัวคงที่เพิ่มขึ้นอีกหนึ่งตัว

6.แทนค่าตัวคงที่ที่หาได้ลงในสมการของความลาดเอียง และการโก่งในขั้นตอนที่ 5 ก็จะได้สมการที่ต้องการ ค่าความลาดเอียงและการโก่งที่จุดใด ๆ จะหาได้โดยแทนค่าของระยะ x ลงไปในสมการของความลาดเอียงและการโก่งงอ

1.2.3 เงื่อนไขสำหรับการหาค่าคงที่ที่ได้จากการอินทิเกรต

1. คานแบบยื่น (Cantilever beam)

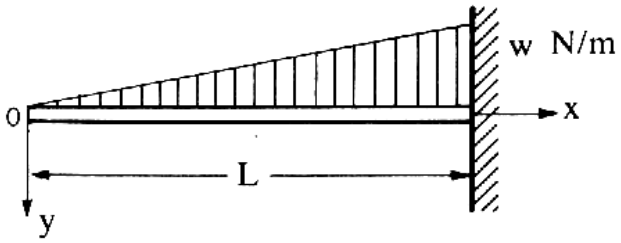
ก. เมื่อแรงกระทำเป็นแบบจุด

เงื่อนไข 1. เมื่อ X=L จะได้ค่าความลาดเอียงเท่ากับศูนย์ $\left[\frac{dy}{dx}=0\right]$

2 . เมื่อ X=L จะได้ระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=0)

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

ข. เมื่อแรงกระทำเป็นแบบกระจาย



รูปที่ 4 แรงกระทำเป็นแบบกระจาย

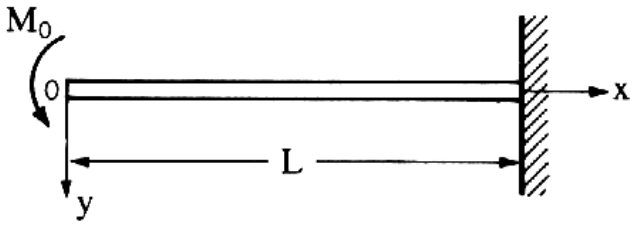
เงื่อนไข 1. เมื่อ x=L จะได้ค่าความลาดเอียงเท่ากับศูนย์ $\left[\frac{dy}{dx}=0\right]$

2. เมื่อ x=L จะได้ค่าระยะโก่งเท่าศูนย์ (y=0)

3. เมื่อ x=0 จะได้แรงเฉือนเท่ากับศูนย์ (V=0)

4. เมื่อ x=0 จะได้โมเมนต์ดัดเท่ากับศูนย์ (M=0)

ค. เมื่อแรงกระทำเป็นแรงคู่ควบหรือโมเมนต์



รูปที่ 5 แรงกระทำเป็นแรงคู่ควบหรือโมเมนต์

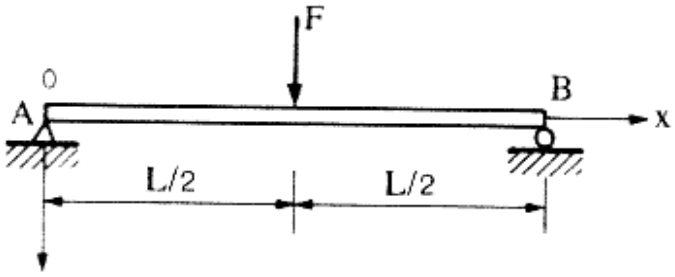
เงื่อนไข 1. เมื่อ x=L จะได้ค่าความลาดเอียงเท่ากับศูนย์ $\left[\frac{dy}{dx}=0\right]$

2. เมื่อ x=L จะได้ค่าระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=o)

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

2. คานช่วงเดียว (Simply supported beam)

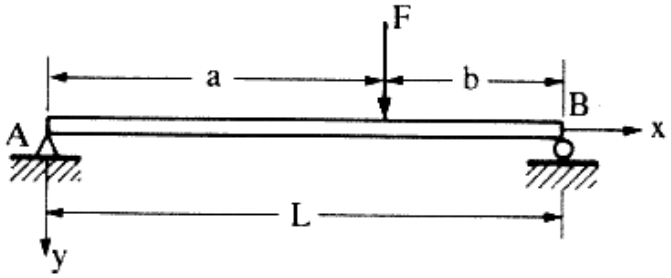
ก. เมื่อแรงกระทำเป็นแบบเป็นจุด



รูปที่ 6 แรงกระทำเป็นแบบเป็นจุด

เงื่อนไข 1. เมื่อ x=0 จะได้ค่าระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=0)

2. เมื่อ $x=\frac{L}{2}$ จะได้ค่าความลาดเอียงเท่ากับศูนย์ $\left[\frac{dy}{dx}=0\right]$



รูปที่ 7 แรงกระทำเป็นแบบเป็นจุด

เงื่อนไข 1. เมื่อ x=0 จะได้ค่าระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=0)

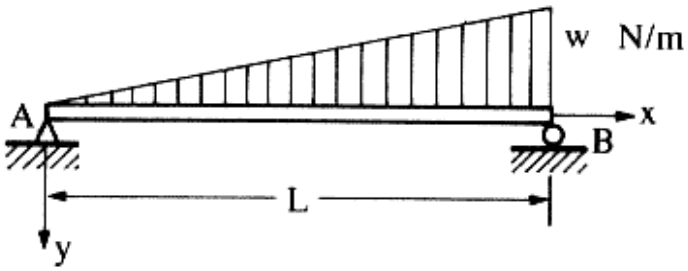
2. เมื่อ x=L จะได้ค่าระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=0)

$$\text{ที่ } x=a, \frac{dy_1}{dx}=\frac{dy_2}{dx} \quad \text{ที่ } x=a$$

$$\text{ที่ } x=a, y_1=y_2 \quad \text{ที่ } x=a$$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

ข.เมื่อแรงกระทำเป็นแบบกระจาย



รูปที่ 8 แรงกระทำเป็นแบบกระจาย

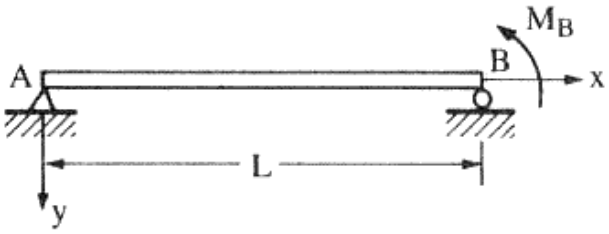
เงื่อนไข 1. เมื่อ x=0 จะได้แรงเฉือนเท่ากับแรงปฏิกิริยาที่จุด A $(V = R_A)$

2. เมื่อ x=0 จะได้โมเมนต์ดัดเท่ากับศูนย์ (M=0)

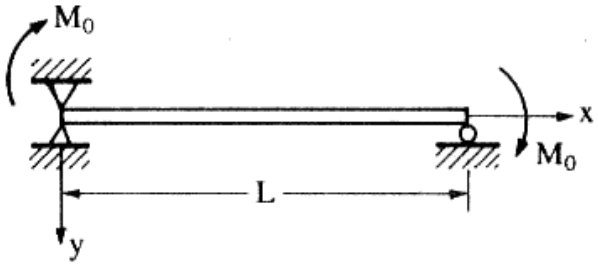
3. เมื่อ x=0 จะได้ระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=0)

4. เมื่อ x=L จะได้ระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=0)

ค. เมื่อแรงกระทำเป็นแรงคู่ควบหรือโมเมนต์



รูปที่ 9 แรงกระทำเป็นแรงคู่ควบหรือโมเมนต์



รูปที่ 10 แรงกระทำเป็นแรงคู่ควบหรือโมเมนต์

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

เงื่อนไข 1. เมื่อ x=0 จะได้ระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=0)

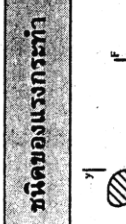
2. เมื่อ x=L จะได้ระยะโก่งเท่ากับศูนย์ (y=0))

1.3 วิธี Superposition

ถ้าหากคานรับแรงหลายชนิด การคำนวณหาค่าความลาดชัน และระยะโก่งตัวด้วยวิธี Moment- area จะยุ่งยากและเสียเวลา ดังนั้นจึงใช้วิธี Superposition โดยแยกแรงกระทำแต่ละชนิดแล้วใช้สูตรสำเร็จในตารางหาค่าความลาดชัน และระยะโก่งตัวได้ทันที ผลของแรงกระทำหลายชนิดกระทำกับคาน จึงเป็นผลรวมของค่าความลาดชัน และระยะโก่งตัวที่คำนวณได้แต่ละชนิด

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

ตารางที่ 1 หาค่าความลาดชันและระยะโก่งตัวของคาน

กรณีที่	ชนิดของแรงกระทำ	โมเมนต์สูงสุด	ค่าความลาดชัน	สมการการโก่ง	ระยะโก่งตัวสูงสุด
1		$M=-FL$	$\theta=\frac{FL^2}{2EI}$	$Ely=\frac{Fx^2}{6}(3L-x)$	$\delta=\frac{FL^3}{3EI}$
2		$M=-Fa$	$\theta=\frac{Fa^2}{2EI}$	$Ely=\frac{Fx^2}{6}(3a-x)$ for $0<x<a$ $Ely=\frac{Fa^2}{6}(3x-a)$ for $a<x<L$	$\delta=\frac{Fa^2}{6EI}(3L-a)$
3		$M=-\frac{W_0L^2}{2}$ $=-\frac{WL}{2}$	$\theta=\frac{W_0L^3}{6EI}$ $=\frac{WL^2}{6EI}$	$Ely=\frac{W_0x^2}{24}(6L^2-4Lx+x^2)$	$\delta=\frac{W_0L^4}{8EI}=\frac{WL^3}{8EI}$
4		$M=-\frac{W_0L^2}{6}$ $=-\frac{WL}{3}$	$\theta=\frac{W_0L^3}{24EI}$ $=\frac{WL^2}{12EI}$	$Ely=\frac{W_0x^2}{120L}(10L^3-10L^2x+5Lx^2-x^3)$	$\delta=\frac{W_0L^4}{30EI}=\frac{WL^3}{15EI}$
5		$M=-M$	$\theta=\frac{ML}{EI}$	$Ely=\frac{Mx^2}{2}$	$\delta=\frac{ML^2}{2EI}$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่** 17
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน** 3 ชั่วโมง

ตารางที่ 2 หาค่าความลาดชันและระยะโก่งตัวของคาน

กรณีที่	ชนิดของแรงกระทำ	โมเมนต์สูงสุด	ค่าความลาดชัน	สมการการโก่ง	ระยะโก่งตัวสูงสุด
6		$M=\frac{FL}{4}$	$\theta_L=\theta_R=\frac{FL^2}{16EI}$	$Ely=\frac{Fx}{12}\left(\frac{3}{4}L^2-x^2\right)$ for $0<x<\frac{L}{2}$	$\delta=\frac{FL^3}{48EI}$
7		$M=\frac{Fab}{L}$ at $x=a$	$\theta_L=\frac{Fb(L^2-b^2)}{6EIL}$ $\theta_R=\frac{Fa(L^2-a^2)}{6EIL}$	$Ely=\frac{Fbx}{6L}(L^2-x^2-b^2)$ for $0<x<a$ $Ely=\frac{Fb}{6L}\left[\frac{L}{b}(x-a)^3+(L^2-b^2)x-x^3\right]$ for $a<x$	$\delta=\frac{Fb(L^2-b^2)^{3/2}}{9\sqrt{3}EIL}$ at $x=\sqrt{\frac{L^2-b^2}{3}}$ At center (not max.) $\delta=\frac{Fb}{48EI}(3L^2-4b^2)$ when $a>b$
8		$M=\frac{W_0L^2}{8}=\frac{WL}{8}$	$\theta_L=\theta_R=\frac{W_0L^3}{24EI}$	$Ely=\frac{W_0x}{24}(L^3-2Lx^2+x^3)$	$\delta=\frac{5W_0L^4}{384EI}=\frac{5WL^3}{384EI}$
9		$M=\frac{W_0L^2}{9\sqrt{3}}=\frac{2WL}{9\sqrt{3}}$	$\theta_L=\frac{7W_0L^3}{360EI}$ $\theta_R=\frac{8W_0L^3}{360EI}$	$Ely=\frac{W_0x}{360L}(7L^4-10L^2x^2+3x^4)$	$\delta=\frac{2.5W_0L^4}{384EI}=\frac{5WL^3}{384EI}$ at $x=0.519L$
10		$M=\frac{W_0L^2}{12}=\frac{WL}{6}$	$\theta_L=\theta_R=\frac{5W_0L^3}{192EI}$	$Ely=\frac{W_0x}{960L}(25L^4-40L^2x^2+16x^4)$ for $0<x<\frac{L}{2}$	$\delta=\frac{W_0L^4}{120EI}=\frac{WL^3}{60EI}$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

ตารางที่ 3 หาค่าความลาดชันและระยะโก่งตัวของคาน

กรณีที่	ชนิดของแรงกระทำ	โมเมนต์สูงสุด	ค่าความลาดชัน	สมการการโก่ง	ระยะโก่งตัวสูงสุด
11		M=M	$\theta_L = \frac{ML}{6EI}$ $\theta_R = \frac{ML}{3EI}$	$Ely = \frac{MLx}{6}\left(1-\frac{x^2}{L^2}\right)$	$\delta = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ at $x = \frac{L}{\sqrt{3}}$ At center (not max.) $\delta = \frac{ML^2}{16EI}$
12		M=M	$\theta_L = \frac{ML}{3EI}$ $\theta_R = \frac{ML}{6EI}$	$Ely = \frac{Mx}{6L}(L-x)(2L-x)$	$\delta = \frac{ML^2}{9\sqrt{3}\,EI}$ at $x = \left(L-\frac{L}{\sqrt{3}}\right)$ At center (not max.) $\delta = \frac{ML^2}{16EI}$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

กิจกรรมการเรียนการสอน

ขั้นตอนการสอนหรือกิจกรรมของครู

ขั้นนำ

1. กล่าวทักทายนักศึกษาแล้วนำภาพการต่อเพลาแบบต่าง ๆ มาให้นักศึกษาดูแล้วถาม

ขั้นสอน

1. แจ้งจุดประสงค์รายวิชา หัวข้อที่จะต้องเรียน การวัดการประเมินผล ข้อตกลงต่าง ๆ แก่นักศึกษา
2. บรรยายเนื้อหาประกอบแผ่นใสในหน่วยที่ 10
3. สาธิตหลักการคำนวณประกอบแผ่นใสตัวอย่างที่ 1และ 2
4. เปิดโอกาสให้นักศึกษาถาม และให้นักศึกษาทำแบบทดสอบหน่วยที่ 10

ขั้นสรุป

1.ให้นักศึกษาช่วยกันสรุปเนื้อหา

งานที่มอบหมายหรือกิจกรรม

1. ให้ศึกษาเอกสารประกอบการเรียนในเรื่อง ที่จะสอนต่อไป
2. ให้ไปศึกษาทบทวนเรื่องที่เรียน และทำแบบฝึกหัด

สื่อการเรียนการสอน

1. เอกสารประกอบการสอนหน่วยที่ 10
2. รูปภาพ 1 ถึง 10

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

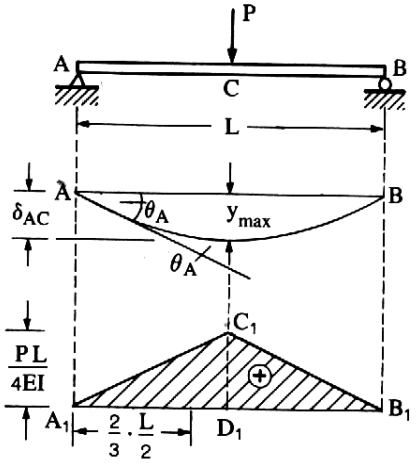
การวัดผลและประเมินผล

1. สังเกตความสนใจผู้เรียน
2. ความรับผิดชอบต่องานที่มอบหมาย
3. การให้ความร่วมมือในการทำกิจกรรมระหว่างเรียน
4. ให้ทำแบบทดสอบ

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

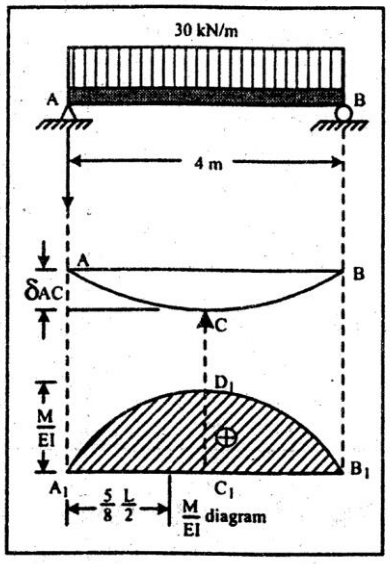
แบบฝึกหัด

1. คานแบบ simply supported ถูกแรงกระทำที่จุดกึ่งกลางของคาน จงหามุมลาดเอียง A และระยะโก่งสูงสุด โดยวิธี moment – area



$\frac{M}{EI}$ diagram

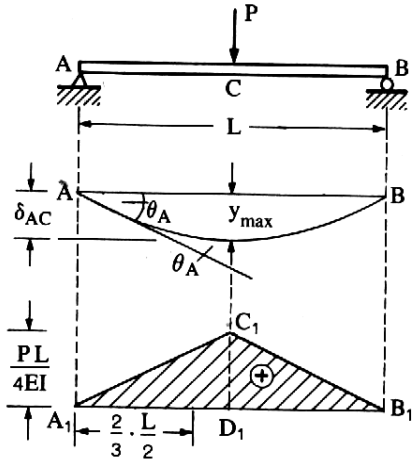
2. จงหาความโก่งตัวที่กึ่งกลางของคาน กำหนดให้ E เท่ากับ 12 จิกะนิวตัน/ตารางเมตร และ I เท่ากับ 200×10^6 mm^4



	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

เฉลยแบบฝึกหัด

1. คานแบบ simply supported ถูกแรงกระทำที่จุดกึ่งกลางของคาน จงหามุมลาดเอียง A และระยะโก่งสูงสุด โดยวิธี moment – area



$\frac{M}{EI}$ diagram

วิธีทำ

จากรูปจะเห็นว่า

θ_A = มุมลาดเอียง = พื้นที่ของ $A_1C_1D_1$

$$\theta_A = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{PL^2}{16EI}$$

ตอบ มุมลาดเอียง $= \frac{PL^2}{16EI}$

$y_{max} = \delta_{AC}$ = โมเมนต์ของพื้นที่ $A_1C_1D_1$ รอบแกนผ่านจุด A_1

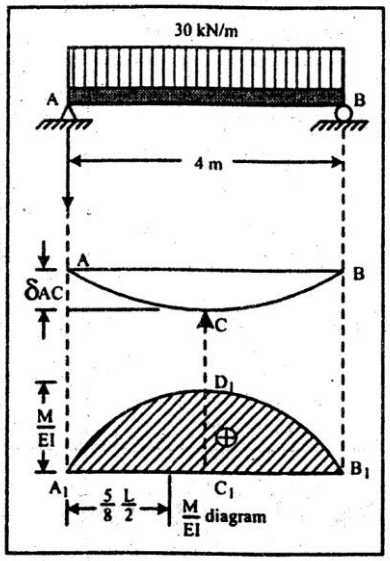
$$y_{max} = \frac{1}{2}\left(\frac{PL}{4EI}\right)\left(\frac{L}{2}\right)\left(\frac{2}{3}\times\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{PL^3}{48EI}$$

ตอบ ระยะโก่งสูงสุดเท่ากับ $\frac{PL^3}{48EI}$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

2. จงหาความโก่งตัวที่กึ่งกลางของคาน กำหนดให้ E เท่ากับ 12 จิกะนิวตัน/ตารางเมตร และ I เท่ากับ 200×10^{6} mm^4



วิธีทำ $M=\dfrac{WL^2}{8}$

$=\dfrac{30\times4^2}{8}=60$ kN.m

$\dfrac{M}{EI}=\dfrac{60\times10^3}{(12\times10^9)(200\times10^{-6})}=0.251/\text{m}$

$\delta_{AC}=$ (พื้นที่ A_1, C_1, D_1)($\bar{x}$)(รอบแกน A)

$=\dfrac{2}{3}\left[\dfrac{M}{EI}\right]\left[\dfrac{L}{2}\right]\left[\dfrac{5}{8}\times\dfrac{L}{2}\right]$

$=\dfrac{2}{3}\times0.025\times\dfrac{4}{2}\times\dfrac{5}{8}\times\dfrac{4}{2}$

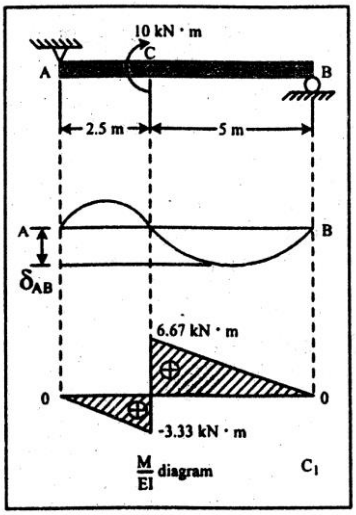
$=0.04167$ m

ตอบ ระยะโก่งตัวที่กึ่งกลางคานเท่ากับ 41.67 มิลลิเมตร

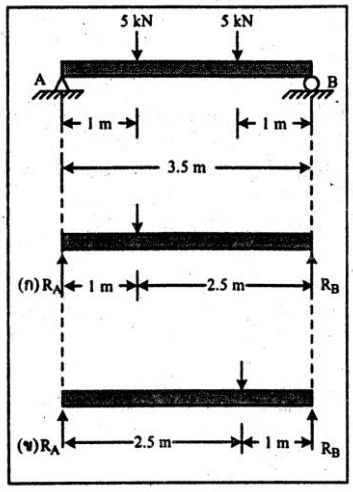
	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

แบบทดสอบ

1. จงหาระยะโก่งตัวสูงสุดของคาน กำหนดให้ EI เท่ากับ 2000 กิโลนิวตันตารางเมตร



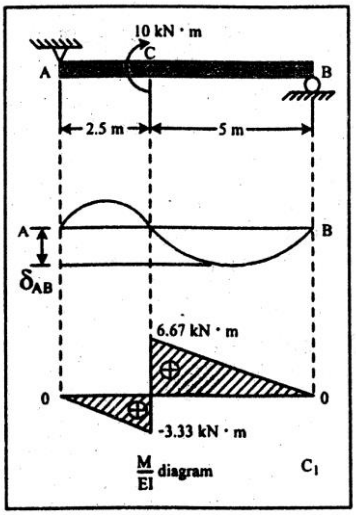
2. จงหาความลาดชันที่จุด A และระยะโก่งตัวที่กึ่งกลางของคาน กำหนดให้ EI เท่ากับ 4 เมกะนิวตันตารางเมตร



	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

เฉลยแบบทดสอบ

1. จงหาระยะโก่งตัวสูงสุดของคาน กำหนดให้ EI เท่ากับ 2000 กิโลนิวตันตารางเมตร



วิธีทำ หาแรงปฏิกิริยา R_A, R_B

$$\left[\sum M_B = 0\right]$$

$$7.5\, R_A = 10$$

$$R_A = \frac{10}{7.5}$$

$$= 1.333 \text{ kN}$$

$$\left[\sum M_A = 0\right]$$

$$7.5\, R_B = 10$$

$$R_B = \frac{10}{7.5}$$

$$R_B = 1.333 \text{ kN}$$

ที่หน้าตัด $0 < x < 2.5$

$$M = -1.333(x)$$

$$x = 0\,\text{m}, \quad M = 0 \text{ kN.m}$$

$$x = 2.5\,\text{m}, \quad M = -1.333(2.5)$$

$$= -3.33 \text{ kN.m}$$

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

ที่หน้าตัด $2.5 < x < 7.5$

$$M = -R_A(x) + 10 \text{ kN.m}$$

$x = 2.5$ m, $M = -3.333(2.5) + 10 = 6.67$ kN.m

$x = 7.5$ m, $M = -3.333(7.5) + 10 = 0$ kN.m

$$\frac{M_1}{EI} = \frac{6.67}{2000} = 0.0033 \text{ 1/m}$$

และ $$-\frac{M_2}{EI} = \frac{3.33}{2000} = -0.0017 \text{ 1/m}$$

$$\delta_{AB} = A_1\bar{x}_1 + A_2\bar{x}_2 \text{ (รอบแกน A)}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{M_1}{EI}\right](5)\left[2.5 + \frac{1}{3}(5)\right] + \frac{1}{2}\left[-\frac{M_2}{EI}\right](2.5)\left[\frac{2}{3}(2.5)\right]$$

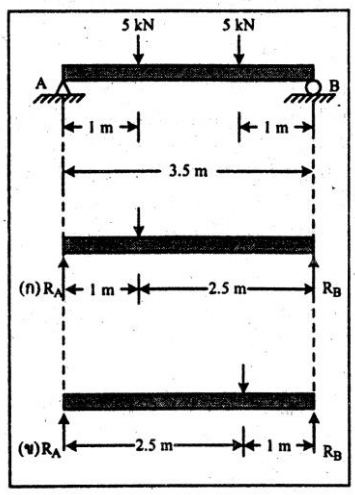
$$= \left[\frac{1}{2} \times 0.0033 \times 5 \times 4.167\right] - \left[\frac{1}{2} \times 0.0017 \times 2.5 \times 1.667\right]$$

$$= 0.0344 - 0.0035 = 0.0309 \text{ m}$$

ตอบ ระยะโก่งสูงสุดของคานเท่ากับ 30.9 มิลลิเมตร

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

2. จงหาความลาดชันที่จุด A และระยะโก่งตัวที่กึ่งกลางของคาน กำหนดให้ EI เท่ากับ 4 เมกะนิวตันตารางเมตร



วิธีทำ แยกคานออกเป็นรูป (ก) และ (ข)

หาความลาดชันที่ A โดยใช้ตารางที่ 2 กรณีที่ 7 จะได้

$$\theta_A = \theta_L = \frac{Fb\left(L^2 - b^2\right)}{6EIL}$$

จากรูป (ก) $b_1 = 2.5$ m

จากรูป (ข) $b_2 = 1$ m

ดังนั้น

$$\theta_A = \frac{Fb_1\left(L^2 - b_1^2\right)}{6EIL} + \frac{Fb_2\left(L^2 - b_2^2\right)}{6EIL}$$

$$= \frac{\left(5\times10^3\times2.5\right)\left(3.5^2 - 2.5^2\right)}{6\times4\times10^6\times3.5} + \frac{\left(5\times10^3\times1\right)\left(3.5^2 - 1^2\right)}{6\times4\times10^6\times3.5}$$

$$= 0.00089 + 0.00067$$

$$= 0.00156 \text{ rad}$$

ตอบ ความลาดชันที่ A เท่ากับ 0.00156 rad

หาระยะโก่งตัวที่กึ่งลางของคาน

จากสูตร $\delta = 2\times\frac{Fb}{48EI}\left(3L^2 - 4b^2\right)$

$$= 2\times\frac{5\times10^3\times1}{48\times4\times10^6}\times\left[3(3.5)^2 - 4(1)^2\right]$$

$$= 0.00171 \text{ m} = 1.71 \text{ mm}$$

ตอบ ระยะโก่งตัวที่กึ่งกลางคานเท่ากับ 1.71 มิลลิเมตร

	แผนการสอน	หน่วยที่ 10
	ชื่อวิชา ความแข็งแรงของวัสดุ	**สอนครั้งที่ 17**
	ชื่อหน่วย การโก่งของคาน	**จำนวน 3 ชั่วโมง**

บันทึกหลังการสอน

ผลการใช้แผนการสอน.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการเรียนของนักเรียน.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

ผลการสอนของครู.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....